EXPRESSIONS OF MATHEMATICAL GENERALIZATION AMONG CHILDREN IN GRADE FIVE OF PRIMARY SCHOOL

EXPRESIONES DE GENERALIZACIÓN MATEMÁTICA EN NIÑOS DE QUINTO GRADO DE PRIMARIA

Genny Rocío Uicab-Ballote
CINVESTAV-IPN
rocio.uicab@cinvestav.mx

Teresa Rojano-Ceballos
CINVESTAV-IPN
trojano@cinvestav.mx

Montserrat García-Campos
Universidad Pedagógica Nacional
mgarcia@g.upn.mx

We report progress from a longitudinal study focused on identifying expressions of mathematical generalization articulated by students at early ages through the design of 17 tasks that are organized into structured blocks, comprising numerical sequences and everyday situations. We present the results obtained with respect to solving numerical sequences.

Keywords: Algebraic thinking, Primary education.

Purpose of the Research

We present preliminary results of a study focused on the analysis of expressions of mathematical generalization that arise in early ages, particularly among students ranging between 10 and 12 years of age when solving generalization mathematical tasks. It is expected that expressions of generalization shown by students in a natural and incipient way will be refined as they develop their capacity for generalization, which could contribute to development of algebraic thinking at later levels.

Reference Framework

Generalization is a topic of interest to various researchers and is analyzed from different perspectives (e.g. Radford, 2000, 2002; Rivera, 2006, 2018; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2012). The approach in this study is based on the contributions of John Mason regarding the ability possessed by students to generalize, and how that ability can be developed through mathematical tasks that lead them to articulate generality.

Expressing the regularities that are observed in a generalization task is a reference to algebraic work, albeit incipient, that arises in students. Mason, Graham, Pimm and Gowar (1999) are of the opinion that expressing generality is a very important process, because it contributes to the acquisition of algebraic language. This process can be considered a continuous spiral of actions (Mason, 1996), which is summarized as the *manipulation* (first action) of particular examples to *obtain meaning* (second action) of what is happening in them, in order to *articulate* generalities (third action), and express them in some useful mathematical form.

Manipulation (of physical, mental or symbolic objects) provides the basis for detecting patterns, relationships, generalities, etc. Discovering what is happening allows one *getting a sense of* some characteristic or property of the objects that are being manipulated, which allows one to *articulate* and manifest the expression of generality. When this occurs, such an expression becomes a new entity that can be manipulated and used to find other properties, allowing it to continue ascending the spiral and starting a new cycle of actions. But when resolution is difficult, and the conjectures are wrong, the sensible thing is to return to the corresponding cycle of actions and *manipulate* more examples in order to be able to ascend.

Likewise, Mason et al. (1999) consider three stages in the generalization process: seeing, saying and recording. “Seeing” refers to the mental identification of a schema, structure or relationship. Seeing generalities means that students can identify key factors and combine them to produce a rule that

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

works; this can happen after a certain time, working with a number of particular examples until the identification of something common is achieved. “Saying”, either to oneself or to someone in particular, is to articulate in words what has been recognized. Before saying the observed generalities, there is an expression of what occurs in particular cases. “Recording” a pattern or relationship leads to symbolization and written communication, which is not easy to do. The register can involve a variety of formats: drawings, word drawings, mostly words and some symbols, or mostly symbols with some words (Mason et al., 1999).

Method

The study is qualitative and descriptive in nature (Cohen, Manion y Morrison, 2007). It is longitudinal and done in cohort as the same students are followed through two school cycles, beginning in grade five of primary school. The study plan for both cycles corresponds to 2011. Identifying regularities in numerical sequences in order to find nearby missing terms or to continue the sequence (Secretaría de Educación Pública, 2011) is one of the expected learning outcomes for grade five, but generalization is not promoted. Textbooks for grades four through six include one or two activities involving these types of number sequences. Participants were deemed to have no experience with generalization tasks at the time of the study.

Design of Mathematical Tasks

17 tasks were designed for the two school cycles, which were organized in four blocks with a structured order involving a gradual transition from number sequences to everyday situations. Blocks I and II correspond to numerical sequences, Blocks III and IV to everyday situations. The analysis of responses corresponding to Blocks I and II is reported here.

Block I (numerical sequences 1-8). The mathematical structure underlying these sequences corresponds to the functions $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 3x$, $f(x) = x + 3$, $f(x) = 4x$, $f(x) = x + 4$. Each sequence is presented through a dotted figure and the corresponding figure number. Inductive reasoning (*manipulation* of particular cases) is fostered with the intention of having students identify the correspondence relationship between the number of points and the figure number (*get a sense of*) to *articulate* the correspondence rule (generalization). When students, using the first elements of the numerical sequence, can find nearby elements, it can be said in terms of Mason (1999), that they perceive generality. By requesting considerably distant elements, the articulation of the generalization rule is promoted. As students manipulate particular cases, they are expected to “see” the corresponding structure or relationship, identifying what remains and what varies so as to articulate the generalization rule that characterizes each task. In each subsection, a figurative, numerical or explanatory record is requested. Figure 3 is an example of the numerical sequence in Block I, they all have a similar format, the variant lies in the function involved.

Block II (numerical sequences 9-10). The mathematical structure of these sequences corresponds to the functions $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 2$. Each sequence is presented in a table that includes numerical terms along with the number that corresponds to the term, omitting the figurative (Figure 1). An inductive reasoning is also fostered, and the registry stage is highlighted during the resolution of the task. The tasks in both blocks are aimed at analyzing the articulation of the (written) ideas that lead to the generalization rule, but in this Block II, the request for a rule is made explicit. Subsection e) encourages students to suggest a number (it could be near or far); according to Mason (1999) these assignments tend to stimulate in students the scope of the generality they are expressing.

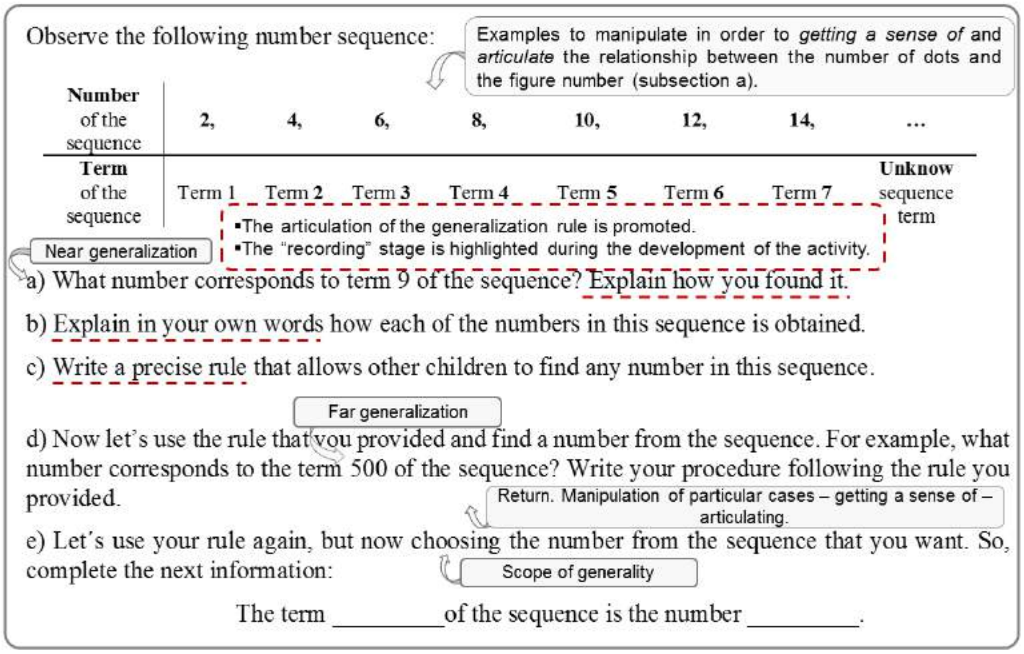

Figure 1: Task 9. Block II

Participants, Application and Analysis of Responses

The participants were 25 students from a public school located in Tekit, Yucatán, Mexico. A printout of each task was provided, students worked individually and there was no intervention by the researcher. The analysis is carried out individually to identify the expressions of generalization by student and by block, given that the tasks in each block have common characteristics. Figure 2 provides the scheme designed for the analysis of Block I responses under the Mason (1996) spiral of actions.

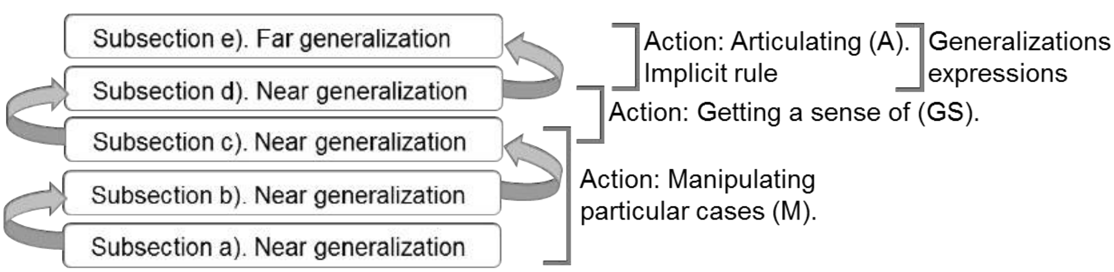

Figure 2: Maison (1996) spiral of actions in the tasks of Block I

Figure 3 provides an example of the analysis of the responses of Student 10 (S10) in Task 2 of Block I. Table 1 shows the summary of the analysis of actions that were recognized in this task by 25 students. We can see that S10 correctly constructs figures 5, 6 and 7 (part a), demonstrating the adequate manipulation of the particular cases, both figuratively and numerically (part b). The manipulation of increasingly distant examples (parts c and d) can be interpreted as getting a sense of generality, which leads to articulation and concise expression of the rule of correspondence between the number of points and the number in the figure (part e). The rule is recorded in natural language, using words (without drawings or symbols). In an analogous way, the responses of the tasks in Block II are analyzed with the corresponding scheme.

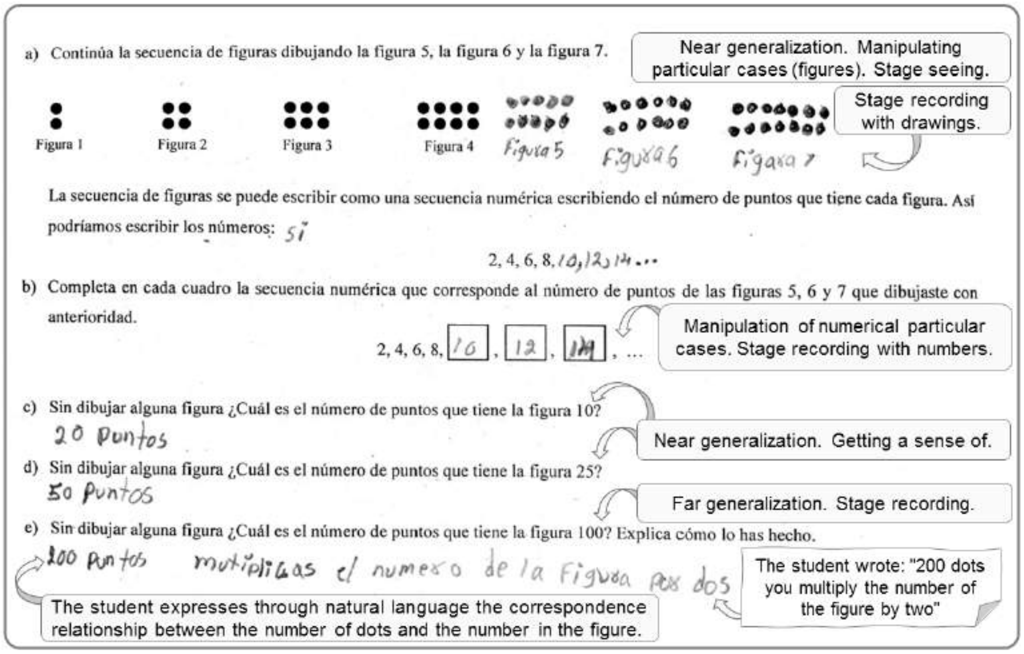

Figure 3: Analysis S10 responses in Task 2 of Block I

Table 1: Summary of actions in Task 2 of Block I

S	a)	b)	c)	d)	e)
S1	M	M	M	GS	A
S2	M				
S3	M	M	M	GS	A
S4					
S5	M	M	M	GS	A
S6	M	M	M	GS	A
S7	M	M	M	GS	A
S8	M	M	M	GS	A

S	a)	b)	c)	d)	e)
S9	M	M	M	GS	A
S10	M	M	M	GS	A
S11	M	M	M	GS	A
S12	M	M	M	GS	A
S13	M	M	M	GS	A
S14	M	M	M	GS	A
S15	M	M	M	M	NA
S16	M	M	M	GS	A
S17	M	M	M	GS	A

S	a)	b)	c)	d)	e)
S18	M	M	M	GS	A
S19	M	M			
S20	M	M			
S21	M	M	M	GS	A
S22	M	M	M	GS	A
S23	M	M	M	GS	A
S24	M	M			
S25	M	M			

Note: S=Student; M=Manipulating; GS= Getting a sense of; A= Articulating; NA=No answer; Blank space=Student fail any of the M-GS-A actions.

Results and Preliminary Conclusions

Students provide evidence of their ability to generalize by identifying, in numerical sequence tasks, those details that remain unchanged and those that change. Also, they can identify regularities and patterns, read and interpret tabular registers and above all articulate expressions of generalization. These expressions were communicated through numerical answers, words or words with some arithmetic symbols, which resulted in 5 categories: 1) expressions that state only the regularity of the pattern, that is, the variation between the terms; 2) numeric expressions that arise from using previous results, being correct only for the functions of the form $f(x) = ax$; 3) generalized number, that is, the generalization is expressed only for the requested number; 4) expressions that incipiently state what happens with the relationship between the two variables involved and 5) expressions denoting generalization considering any term (such as the one reported in Figure 3). In the next phase of the study, we will analyze the stage "saying" using the expressions of generalization done by interviewing the 25 students when they solve everyday context tasks. Finally, in our opinion the work provides references on the development of algebraic thinking and language that can contribute to the teaching of basic education.

References

Cohen, L. Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6[a] ed.). EE. UU.: Routledge (e.o.: 1980).

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Mason, J. (1999). La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, *4*(3), 232-247.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Rutas hacia, raíces del Álgebra* (Agudillo, C. Trad.) Colombia: Universidad Pedagógica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985).

Radford, L. (2000). Sings and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The Seen, the Spoken and the Written: A Semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Rivera, F. D. (2006). Changing the Face of Arithmetic: Teaching Children Algebra. *Teaching Children Mathematics, 12*(6), 306-311.

Rivera, F. D. (2018). Pattern Generalization Processing of Elementary Students: Cognitive Factors Affecting the Development of Exact Mathematical Structures. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(9). https://doi.org/10.29333/ejmste/92554

Schliemann A. D., Carraher D. W., Brizuela B. M. (2012). Algebra in elementary school. In L. Coulange & J.-P. Drouhard (Eds.) Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives. Special Issue of *Recherches en Didactique des Mathématiques,* pp. 109-124.

Secretaría de Educación Pública (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica. México: Secretaría de Educación Pública.

EXPRESIONES DE GENERALIZACIÓN MATEMÁTICA EN NIÑOS DE QUINTO GRADO DE PRIMARIA

EXPRESSIONS OF MATHEMATICAL GENERALIZATION AMONG CHILDREN IN GRADE FIVE OF PRIMARY SCHOOL

Genny Rocío Uicab Ballote
CINVESTAV-IPN
rocio.uicab@cinvestav.mx

Teresa Rojano Ceballos
CINVESTAV-IPN
trojano@cinvestav.mx

Montserrat García Campos
Universidad Pedagógica Nacional
mgarcia@g.upn.mx

Se reportan avances de una investigación longitudinal cuyo interés se centra en identificar las expresiones de generalización matemática que articulan los estudiantes en edades tempranas a través del diseño de 17 tareas organizadas en bloques estructurados que comprenden secuencias numéricas y situaciones cotidianas. Se presentan los resultados obtenidos en la resolución de las secuencias numéricas.

Palabras clave: pensamiento algebraico, educación primaria.

Propósito de la Investigación

Se presentan resultados preliminares de un estudio cuyo propósito es analizar las expresiones de generalización matemática que se manifiestan en edades tempranas, particularmente en estudiantes de 10 a 12 años cuando resuelven tareas matemáticas de generalización. Se considera que las expresiones de generalización que manifiestan los estudiantes de manera natural e incipiente se irán refinando conforme vayan desarrollando su capacidad de generalización, lo que podría contribuir al desarrollo de un pensamiento algebraico en niveles posteriores.

Marco de Referencia

La generalización es de interés para diversos investigadores y es analizada desde diferentes perspectivas (p.ej. Radford, 2000, 2002; Rivera, 2006, 2018; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2012). En esta investigación el enfoque se apoya en las contribuciones de John Mason respecto a la capacidad de generalizar que poseen los estudiantes, y cómo ésta puede ser desarrollada mediante tareas matemáticas que los conduzcan a articular la generalidad.

Expresar las regularidades que se observan en una tarea de generalización es referencia del trabajo algebraico, aún incipiente, que surge en los estudiantes. Mason, Graham, Pimm y Gowar (1999) consideran que expresar la generalidad es un proceso importante porque contribuye a la adquisición del lenguaje algebraico. Este proceso puede considerarse como una espiral continua de acciones (Mason, 1996), la cual se resume en la *manipulación* (primera acción) de ejemplos particulares para *obtener sentido* (segunda acción) de lo que está ocurriendo en ellos, con el fin de *articular* generalidades (tercera acción) y expresarlas en alguna forma matemática útil.

La *manipulación* (de objetos físicos, mentales o simbólicos) proporciona las bases para detectar patrones, relaciones, generalidades, etc. Descubrir lo que está sucediendo permite *obtener sentido de* alguna característica o propiedad de los objetos que se están manipulando, lo que da lugar a *articular* y manifestar la expresión de generalidad. Cuando esto ocurre, tal expresión se convierte en una nueva entidad que puede ser manipulada y usarse para encontrar otras propiedades, lo que permite continuar ascendiendo en la espiral empezando un nuevo ciclo de acciones. Pero cuando la resolución resulta difícil, y las conjeturas son erróneas, es sensato regresar al ciclo de acciones correspondiente y *manipular* más ejemplos para poder ascender.

Asimismo, Mason et al. (1999) consideran tres etapas en el proceso de generalización: ver, decir y registrar. “Ver” se refiere a la identificación mental de un esquema, estructura o relación. Ver generalidades implica que los estudiantes puedan identificar factores clave y combinarlos para producir una regla que funcione; esto puede ocurrir después de cierto tiempo, trabajando con un número de ejemplos particulares hasta que se logra la identificación de algo común. El “decir”, ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es articular en palabras aquello que se ha reconocido. Antes de decir las generalidades observadas se suele decir qué ocurre en casos particulares. “Registrar” un patrón o relación conduce a la simbolización y la comunicación escrita, lo cual no es fácil de realizar. El registro puede involucrar una variedad de formatos: dibujos, dibujos con palabras, la mayor parte palabras y algunos símbolos o la mayor parte de símbolos con algunas palabras (Mason et al., 1999).

Método

El estudio es de naturaleza cualitativa y de corte descriptivo; es longitudinal y de cohorte (Cohen, Manion y Morrison, 2007) en virtud de que se realiza un seguimiento a los mismos estudiantes durante dos ciclos escolares, empezando en quinto grado de primaria. El plan de estudios de ambos ciclos corresponde al año 2011, entre los aprendizajes esperados en quinto grado se encuentra la identificación de regularidades en sucesiones numéricas para encontrar términos faltantes cercanos o continuar la sucesión (Secretaría de Educación Pública, 2011) pero no se promueve la generalización. Los libros de texto de cuarto a sexto grado incluyen una o dos actividades para trabajar con ese tipo de secuencias numéricas. Se considera que los participantes no contaban con experiencia sobre tareas de generalización al momento del estudio.

Diseño de las tareas matemáticas

Se diseñaron 17 tareas para los dos ciclos escolares, organizadas en cuatro bloques con un orden estructurado que conlleva ir gradualmente de secuencias numéricas a situaciones cotidianas. Los

Bloques I y II corresponden a secuencias numéricas, los Bloques III y IV a situaciones cotidianas. Se reporta el análisis de respuestas correspondientes a los Bloques I y II.

Bloque I (secuencias numéricas 1-8). La estructura matemática que subyace a estas secuencias corresponde a las funciones $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 3x$, $f(x) = x + 3$, $f(x) = 4x$, $f(x) = x + 4$. Cada secuencia se presenta mediante una figura con puntos y el número de la figura correspondiente. Se promueve un razonamiento inductivo (*manipulación* de casos particulares) con la intención de que los estudiantes identifiquen la relación de correspondencia entre el número de puntos y el número de figura (*obtener sentido de*) para *articular* la regla de correspondencia (generalización). Cuando los estudiantes, apoyándose en los primeros elementos de la secuencia numérica puedan encontrar elementos cercanos se puede decir en términos de Mason (1999) que ellos perciben generalidad. Al solicitar elementos considerablemente distantes se promueve la articulación de la regla de generalización. Se espera que a medida que manipulen los casos particulares "vean" la estructura o relación correspondiente, identificando aquello que permanece y lo que varía para articular la regla de generalización que caracteriza a cada tarea. En cada inciso se solicita hacer un registro de tipo figurativo, numérico o explicativo. La Figura 3 es un ejemplo de secuencia numérica del Bloque I, todas poseen un formato similar, la variante radica en la función involucrada.

Bloque II (secuencias numéricas 9-10). La estructura matemática de estas secuencias corresponde a las funciones $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 2$. Cada secuencia es presentada mediante una tabla que incluye términos numéricos y el número que le corresponde al término, omitiendo lo figurativo (Figura 1). Nuevamente se promueve un razonamiento inductivo y se destaca la etapa registrar durante la resolución de la tarea. En las tareas de ambos bloques se pretende analizar la articulación de las ideas (escritas) que llevan a la regla de generalización, pero en este Bloque II, se hace explícita la solicitud de una regla. El inciso e) promueve que los estudiantes propongan un número (éste puede ser cercano o lejano), Mason (1999) expresa que estas encomiendas tienden a estimular en ellos el alcance de la generalidad que están expresando.

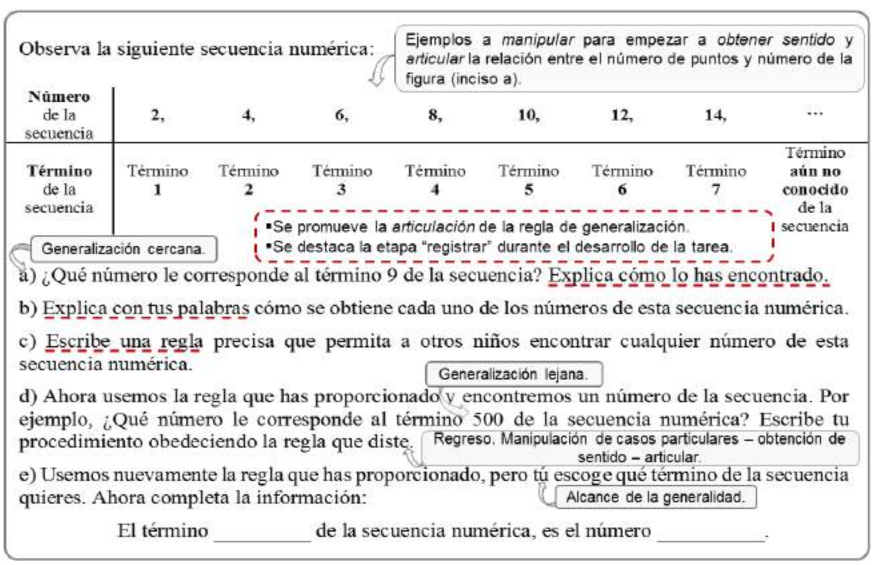

Figura 1: Tarea 9. Bloque II

Participantes, aplicación y análisis de las respuestas

Participaron 25 estudiantes pertenecientes a una escuela pública ubicada en Tekit, Yucatán, México. Cada tarea fue entregada impresa, los estudiantes trabajaron de manera individual y no hubo intervención por parte del investigador. El análisis se realiza individual para identificar las manifestaciones de generalización en cada estudiante y por bloque, en virtud de que las tareas de cada bloque presentan características comunes. En la Figura 2 se presenta el esquema diseñado para el análisis de las respuestas del Bloque I bajo la espiral de acciones de Mason (1996).

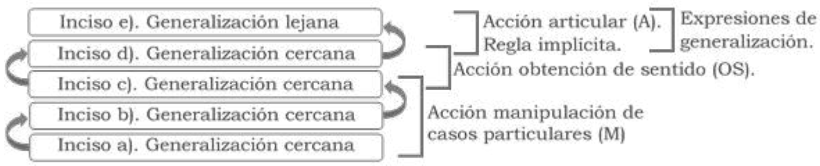

Figura 2: Espiral de acciones de Maison (1996) en las tareas del Bloque I

La Figura 3 presenta un ejemplo del análisis de las respuestas del Estudiante 10 (E10) en la Tarea 2 del Bloque I. La Tabla 1 muestra el resumen del análisis de acciones que se reconocieron en los 25 estudiantes en dicha tarea. Se puede identificar que E10 construye correctamente las figuras 5, 6 y 7 (inciso a) evidenciando la manipulación adecuada de los casos particulares tanto figurativa como numéricamente (inciso b). A medida que manipula ejemplos cada vez más distantes (incisos c y d) se puede interpretar que va obteniendo sentido de la generalidad, lo que le conlleva articular y expresar de manera concisa la regla de correspondencia entre el número de puntos y el número de la figura (inciso e). El registro de la regla lo realiza en lenguaje natural, mediante palabras (sin dibujos, ni símbolos). De manera análoga se analizan las respuestas de las tareas del Bloque II con el esquema correspondiente.

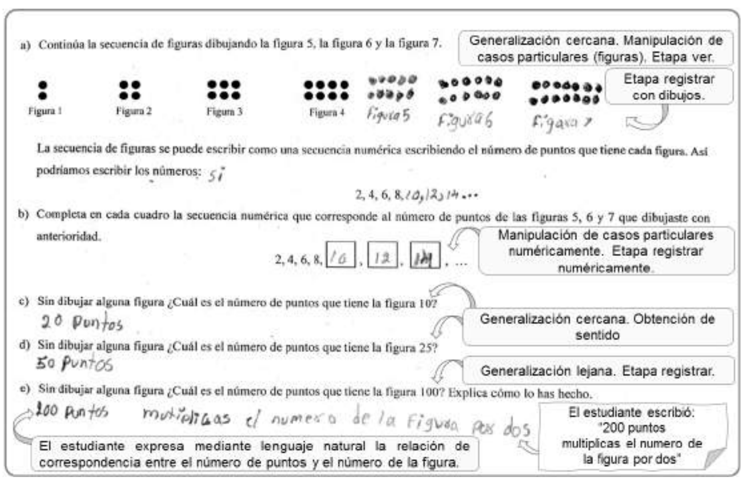

Figura 3: Análisis de las respuestas del Estudiante 10 en la Tarea 2 del Bloque I

Tabla 1: Resumen de acciones en la Tarea 2 del Bloque I

S	a)	b)	c)	d)	e)
S1	M	M	M	GS	A
S2	M				
S3	M	M	M	GS	A
S4					
S5	M	M	M	GS	A
S6	M	M	M	GS	A
S7	M	M	M	GS	A
S8	M	M	M	GS	A

S	a)	b)	c)	d)	e)
S9	M	M	M	GS	A
S10	M	M	M	GS	A
S11	M	M	M	GS	A
S12	M	M	M	GS	A
S13	M	M	M	GS	A
S14	M	M	M	GS	A
S15	M	M	M	M	NA
S16	M	M	M	GS	A
S17	M	M	M	GS	A

S	a)	b)	c)	d)	e)
S18	M	M	M	GS	A
S19	M	M			
S20	M	M			
S21	M	M	M	GS	A
S22	M	M	M	GS	A
S23	M	M	M	GS	A
S24	M	M			
S25	M	M			

Nota: E=Estudiante; M=Acción Manipular; OS=Acción Obtención de Sentido; A=Acción Articular; NC=No contestó; Espacio en blanco=El estudiante no logra alguna de las acciones M-OS-A.

Resultados y Conclusiones Preliminares

Los estudiantes proporcionan evidencia de su capacidad para generalizar al identificar en las tareas con secuencias numéricas aquellos detalles que permanecen invariantes y los que cambian. También, pueden identificar regularidades y patrones, leer e interpretar registros tabulares y sobre todo articular expresiones de generalización. Dichas expresiones fueron comunicadas mediante respuestas numéricas, con palabras, o palabras con algunos símbolos aritméticos, encontrándose 5 categorías: 1) expresiones que enuncian solo la regularidad del patrón, es decir, la variación entre los términos; 2) expresiones numéricas que surgen de usar resultados anteriores, siendo correctas solo para las funciones de la forma $f(x) = ax$; 3) número generalizado, es decir, se expresa la generalización sólo para el número solicitado; 4) expresiones que enuncian de manera incipiente lo que ocurre con la relación entre las dos variables involucradas y 5) expresiones que denotan generalización considerando un término cualquiera (como la que se reporta en la Figura 3). En la siguiente fase de la investigación se analizarán las expresiones de generalización obtenidas en la etapa "decir" al entrevistar a los 25 estudiantes durante la resolución de las tareas de situaciones cotidianas. Finalmente, se considera que el trabajo proporciona referentes acerca del desarrollo del pensamiento y lenguaje algebraico que pueden contribuir en la enseñanza de la educación básica.

Referencias

Cohen, L. Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6ª ed.). EE. UU.: Routledge (e.o.: 1980).

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Mason, J. (1999). La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, *4*(3), 232-247.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Rutas hacia, raíces del Álgebra* (Agudillo, C. Trad.) Colombia: Universidad Pedagógica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985).

Radford, L. (2000). Sings and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The Seen, the Spoken and the Written: A Semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Rivera, F. D. (2006). Changing the Face of Arithmetic: Teaching Children Algebra. *Teaching Children Mathematics, 12*(6), 306-311.

Rivera, F. D. (2018). Pattern Generalization Processing of Elementary Students: Cognitive Factors Affecting the Development of Exact Mathematical Structures. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(9). https://doi.org/10.29333/ejmste/92554

Schliemann A. D., Carraher D. W., Brizuela B. M. (2012). Algebra in elementary school. In L. Coulange & J.-P. Drouhard (Eds.) Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives. Special Issue of *Recherches en Didactique des Mathématiques,* pp. 109-124.

Secretaría de Educación Pública (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica. México: Secretaría de Educación Pública.