

## DETECTION OF DIFFICULTIES IN ENDOWING THE NOTIONS OF CHANGE AND VARIATION WITH MEANING THROUGH ITERATION

### DETECCIÓN DE DIFICULTADES EN LA DOTACIÓN DE SIGNIFICADO DE LAS NOCIONES DE CAMBIO Y VARIACIÓN MEDIANTE ITERACIÓN

Arturo E. Meléndez  
CINVESTAV DME, México  
amelendezj@cinvestav.mx

Eugenio Filloy  
CINVESTAV DME, México  
efilloy@cinvestav.mx

Luis Puig  
Universidad de Valencia, Spain  
luis.puig@uv.es

Keywords: Precalculus Teacher Education - Preservice Design Experiments Problem Solving

### Introduction

The concept of variable is of utmost importance since covariation, function, derivative and integral are built on it. However, as has been reported for decades (Rosnik, 1980), most textbooks tend to approach the concept of variable in an ambiguous and confusing way, due to the wide diversity of meanings that implies, causing difficulties in teaching (Díaz and Morales, 2005).

In this research is important to study in a particular way the difficulties that arise when working with a teaching model consisting of activities that involve the treatment of change and variation in situations of diverse contexts. Change is understood as the modification of states of the qualities involved in a phenomenon, and variation as the quantification of change; therefore, when carrying out these quantifications we are in the possibility of introducing the concept of variable.

The research central problem is related to reading / transformation of the textual spaces that involve the notions of change and variation, to give meaning to the arithmetic and algebraic variables.

We intend to characterize the way in which a group of future middle school math teachers give meaning to the notions of variation, function, variable and through experimentation with a Model of Teaching that incorporates work with dynamic phenomena and problem solving.

Based on these purposes, the following research questions were asked. What are the students' actions when solving problems related to variation and use of variables in different fields? How does the level of abstraction of the idea of change evolve, in order to give meaning to the notion of variable? And what are the main difficulties that arise when working iterative processes and solving problems related to variation and the concept of function?

### Theoretical framework

The theoretical-methodological framework that guides this work is of the Local Theoretical Models (MTL) (Filloy, 1999), which allows to analyze the phenomena that occur during teaching / learning. Special attention is given to meanings of mathematical concepts thanks to its use more than its meaning in the abstract.

During the development of the teaching-learning processes of a mathematical content, four interrelated elements are presented: the person who teaches, the person who learns, the mathematical content to teach / learn and communication that is established between the participants in the process. Therefore, an MTL that contemplates the characterization of the phenomena and relationships between the aforementioned elements, is made up of the designed Teaching Model, the Model of cognitive processes under which the actions of the students will be characterized, the corresponding formal Model to the mathematical content and the Communication Model which analyzes the exchange of information between the participants (Filloy, Rojano, Puig, 2008).

In this research, the model of formal competence is supported in part by the ideas of Hans Freudenthal, exposed in his book *Phenomenology Didactics of Mathematical Structures*, specifically

in the analysis he makes in the chapters “Algebraic Language” and “Functions” (Freudenthal, 1983). We also consider the formal study of the concept of iteration, which plays a prominent role in this work.

According to Freudenthal (1983), the concept of function is based on the concept of variable and the idea of dependency. The precision in which it is possible to describe the dependency between variables can be different, ranging from the use of notions of order (the more of this, the more of that), to relating one to the other more or less precisely, possibly numerically.

An idea that theoretically supports the notion of iteration, since it is considered to have the potential to contribute in the endowment of meaning to the concepts of variation and variable, highlighting its dynamic quality, from an approach with a low degree of abstraction (Choate, Devaney and Foster, 1999; Peitgen et al., 2004).

The formal model is an element that helps us to observe the students’ productions, in addition to these references, we characterize the actions based on the categories: type of approach used by students when solving problematic situations, either qualitative or quantitative. We identify if they are productions of a dynamic or static type and we classify the uses of the variable, either arithmetic or algebraic.

Filloy (1999) states that there are theoretical bases that confirm that a first semantic approach to algebra is more convenient for the meaning endowment of concepts than a merely syntactic approach. In this research project, where the notions of change, variation, variable and function are worked on, it has been chosen to carry out a specific type approach based on a critical historical analysis of the concept of function, with the objectives to detect epistemological obstacles generated during its development (Cuevas and Díaz, 2014), and that students could present it during their learning process (Godino, 2003).

### **Methodology**

The experimentation was carried out with 23 students (21-22 years old), who are currently studying the eighth semester of a Bachelor’s Degree in Secondary Education with a specialty in Mathematics at Benemérita and Centennial Normal School of the State of Durango, located in Durango, Mexico.

The development of experimentation is based on the methodology defined in the Local Theoretical Models (Filloy, 1999), which establishes six stages: selection of the study population; design and application of a diagnosis; population classification, which was carried out based on the analysis of the level of syntactic, semantic competence and intuitive use of the population (Rojano, 1985); election of a representative sample of the population; case study through clinical interviews and elaboration of an observation report.

### **Experimentation results**

Next, a representative problematic situation of the teaching model is presented, describing the students’ productions during their resolution.

After the future teachers worked on a phenomenon of bank movements with simple interest, a similar problem was posed to them, but with a compound interest, since it is interesting to observe the way they treat phenomena where behaviors other than linear or quadratic are presented; in this case, exponential type. The situation raised was as follows.

When in a loan the percentage is added to the capital and becomes part of the debt, the interest on this new capital is called compound interest.

1. Suppose we have a capital of 200 pesos at 20% compound interest for 5 months. Complete the following table to find out how much will be due at the end of each month

One of the main difficulties presented in this situation was detecting the type of variation involved. To achieve this, some students tried to help themselves with the graphical representation, first obtaining a tabular representation of the situation, and then graphing the values as ordered pairs. They proceeded by placing the corresponding points and then drew a line that passes through each of these. Thanks to this, linear variation began to be discarded as corresponding to the phenomenon worked.

Not being able to define the type of variation involved, some students carried out a different process, which consisted of calculating the differences between the consecutive terms and then calculating the differences of the differences, but when calculating the first and second differences they do not obtain constant values, which causes even more confusion. They even decide to make the calculation of the third differences without obtaining a result that makes it possible to make sense of the phenomenon. It can be seen that the method is rescued as a mechanized process.

There was another group of students who also used the method of differences and also did not allow them to determine the type of variation present in the phenomenon, but it was useful to discard the quadratic variation as a possibility, since they obtained the second difference, they did not have constant values.

The Numerical processing of the situation allowed two students to observe that, as the independent variable increases, the differences in the dependent variable become increasingly. It seems clear in their reasoning since they express in a qualitative way the characteristics that the graph would have if it were prolonged.

### **Conclusions**

During the implementation of the teaching model, the students performed different productions in order to make sense of the change in dynamic phenomena, by observing and characterizing them, we can answer the questions posed initially.

Regarding the process of abstraction of notions of change, the following was identified. Generally, at first, a qualitative analysis is carried out in which the characteristics of the phenomenon that is modified is identified, which are expressed in the form of non-measurable qualities. By deepening in the analysis of the experiments, the need to measure these characteristics emerges. The qualities identified above are refined, to make way for the approach of magnitudes (variables) that can be measured.

After determining the magnitudes involved, those that change and those that remain constant are identified and, in turn, a class relationship approximation is carried out that maintains and the direction of said relationship (dependency).

By means of a quantitative analysis, consisting of operating arithmetically with the identified data, specific states of the variables are determined (use of the arithmetic variable) (regularly the initial state and one more).

By organizing the information obtained, it is possible to carry out a dynamic reading of it, which helps to determine the relationships between the variables.

By generalizing the arithmetic processes used, it is possible to produce an algebraic text that represent relationships (use of the algebraic variable), in other words: the statement of a function.

In some cases, the verification of the correspondence of the algebraic text with the set of states of the magnitudes were carried out, performing the substitution of data and observing if indeed the function represents the phenomenon.

Regarding the most frequent actions, there is a tendency to linearity: when the type of treatment that should be given to the phenomenon is not understood, a linear treatment was chosen. Students generate different strategies to define the kind of variation in phenomena, however, the most used

resource is production is the production of Cartesian graphic texts. By observing the characteristics of these, they try to determine the type of function worked. When performing geometric text production with a low curvature, the variation tends to be defined as linear. However, when it is evident that the geometric text has a certain curvature, it tends to be defined as quadratic.

And finally, the most frequent difficulty arises when defining the type of behavior of the phenomena, resort to arithmetic text, generally in the form of tables of values. The frequent use of the method of differences was detected to define the variable dependent on the phenomena, Generally mechanically applied; the lack of meaning is evident when working with situations of exponential growth, where students state that they do not understand why they never obtain a constant value, despite making a large number of differences.

### Referencias

- Choate, J., Devaney, R., & Foster, A. (1999). *Iteration. A tool kit of dynamics activities*. California: Key Curriculum Press.
- Cuevas, C. y Díaz, J. (2014). La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. *El Cálculo y su Enseñanza* 5(5) pp. 165-179.
- Díaz, J. y Morales, L. (2005). El concepto de variable en los libros de texto. En H. Leyva, H. Carrillo y L. Díaz (Eds.), *XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas (I)* (pp. 39-40) Universidad de Sonora, México.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada, Departamento de didáctica de las matemáticas.
- Filloy, E. et al. (1999). *Aspectos teóricos del algebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Utrecht: Reidel Publishing Co.
- Peitgen, H.-O., Jurgens, H., & Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*. New York: Springer Verlag.
- Rojano, T. (1985). De la aritmética al álgebra. Tesis doctoral. México: CINVESTAV-IPN.
- Rosnick, P. (1980). The presentation of the concept of variable and the development of problem solving skills: a multi-text review. Washington, DC: ERIC Clearinghouse.
- Ursini, S. (1994) Los niños y las variables. *Educación Matemática*, 6(3), 94-108.

---

## DETECCIÓN DE DIFICULTADES EN LA DOTACIÓN DE SIGNIFICADO DE LAS NOCIONES DE CAMBIO Y VARIACIÓN MEDIANTE ITERACIÓN

### DETECTION OF DIFFICULTIES IN ENDOWING THE NOTIONS OF CHANGE AND VARIATION WITH MEANING THROUGH ITERATION

Arturo E. Meléndez  
CINVESTAV DME, México  
amelendezj@cinvestav.mx

Eugenio Filloy  
CINVESTAV DME, México  
efilloy@cinvestav.mx

Luis Puig  
Universidad de Valencia,  
España  
luis.puig@uv.es

*En esta investigación experimental, observamos y caracterizamos el desempeño de un grupo de futuros docentes que cursan la licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas (20-21 años). Adoptamos la propuesta de los Modelos Teóricos Locales como marco teórico-metodológico. El objetivo es caracterizar los procesos de producción de significado de las nociones de variación y variable mediante la aplicación de un Modelo de Enseñanza que implica el trabajo con fenómenos de cambio.*

Palabras clave: Modelo de enseñanza, cambio, variación exponencial, sucesiones, dificultades

## Introducción

El concepto de variable es de suma importancia ya que sobre él se construyen ideas como la covariación, función, derivada e integral. Sin embargo, como se ha reportado desde hace décadas (Rosnik, 1980), la mayoría de los libros de texto suelen abordar el concepto de variable de forma ambigua y confusa, debido a la amplia diversidad de significados que implica, causando dificultades en su enseñanza (Díaz y Morales, 2005).

En esta investigación interesa estudiar, de forma particular, las dificultades que emergen al trabajar con un modelo de enseñanza constituido por actividades que implican el tratamiento del cambio y la variación en situaciones y contextos diversos. Entiéndase el cambio como la modificación de estados de las cualidades implicadas en un fenómeno, y la variación como la cuantificación del cambio; por lo tanto, al llevar a cabo dichas cuantificaciones estamos en la posibilidad de introducir el concepto de variable.

El problema central de la investigación está relacionado con la lectura/transformación de espacios textuales que involucran las nociones de cambio y variación, para dotar de significado a las variables aritméticas y algebraicas.

Nos proponemos caracterizar la forma en que un grupo de futuros docentes de matemáticas de nivel secundaria dan significado a las nociones de variación, variable y función, mediante la experimentación con un Modelo de Enseñanza que incorpora el trabajo con fenómenos dinámicos y la resolución de problemas.

Con base en dichos propósitos se plantearon las siguientes preguntas de investigación. ¿Cuáles son las actuaciones de los estudiantes al resolver problemas relacionados con la variación y el uso de variables en diversos ámbitos?, ¿de qué forma evoluciona el grado de abstracción de la idea de cambio, para lograr dar significado a la noción de variable? y ¿cuáles son las principales dificultades que se presentan al trabajar procesos iterativos y resolver problemas relacionados con la variación y el concepto de función?

## Marco teórico

El marco teórico-metodológico que guía este trabajo es el de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Fillooy, 1999), el cual permite analizar los fenómenos que se presentan durante los procesos de enseñanza/aprendizaje. Se otorga una especial atención a la dotación de significados de los conceptos matemáticos gracias a su uso, más que por su significado en abstracto.

Durante el desarrollo de los procesos de enseñanza aprendizaje de un contenido matemático se presentan cuatro elementos interrelacionados: el sujeto que enseña, el sujeto que aprende, el contenido matemático a enseñar/aprender y la comunicación que se establece entre los participantes en el proceso. Por lo tanto, un MTL que contempla la caracterización de los fenómenos y relaciones entre los elementos mencionados, se compone por el Modelo de enseñanza diseñado, el Modelo de procesos cognitivos bajo el cual se caracterizarán la actuaciones de los estudiantes, el Modelo formal correspondiente al contenido matemático y el Modelo de comunicación, con base en el cual se analiza el intercambio de información entre los participantes (Fillooy, Rojano, Puig, 2008).

En esta investigación, el modelo de competencia formal está sustentado en parte en las ideas de Hans Freudenthal expuestas en su libro *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*, de forma específica en el análisis que hace en los capítulos “Lenguaje Algebraico” y “Funciones” (Freudenthal, 1983). También se considera el estudio formal del concepto de iteración, que juega un rol destacado en este trabajo.

Según Freudenthal (1983), el concepto de función se constituye sobre el concepto de variable y la idea de dependencia. La precisión con que es posible describir la dependencia entre variables puede

ser distinta, yendo desde el uso de nociones de orden (cuanto más esto, tanto más eso), hasta relacionar una con otra de forma más o menos precisa, posiblemente numérica.

Una idea más que sustenta teóricamente la investigación es la noción de iteración, ya que se considera que tiene potencial para contribuir en la dotación de significado a los conceptos de variación y variable, resaltando su cualidad dinámica, desde una aproximación con un grado de abstracción bajo (Choate, Devaney y Foster, 1999; Peitgen et al., 2004).

El modelo formal es un elemento que nos sirve para observar las producciones de los estudiantes, además de estos referentes, caracterizamos las actuaciones con base en las categorías: tipo de aproximación empleada por los estudiantes al resolver situaciones problemáticas, ya sea de tipo cualitativa o cuantitativa. Identificamos si son producciones de tipo dinámica o estática y clasificamos los usos de la variable, ya sea aritmética o algebraica.

Filloy (1999) afirma que existen bases teóricas que confirman que un primer acercamiento semántico al álgebra es más conveniente para la dotación de significado de los conceptos que un acercamiento meramente sintáctico. En este proyecto de investigación, en donde se trabajan las nociones de cambio, variación, variable y función, se ha optado por llevar a cabo un acercamiento de tipo concreto con base en un análisis histórico crítico del concepto de función, con el objetivo de detectar obstáculos epistemológicos generados durante su desarrollo (Cuevas y Díaz, 2014), y que podrían presentar los estudiantes durante su proceso de aprendizaje (Godino, 2003).

### **Metodología**

La experimentación se realizó con 23 estudiantes (21-22 años), que actualmente cursan el octavo semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas en la Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de Durango, ubicada en Durango, México.

El desarrollo de la experimentación se basa en la metodología definida en los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999), la cual establece seis etapas: selección de la población de estudio; diseño y aplicación de un diagnóstico; clasificación de la población, la cual fue realizada con base en el análisis del nivel de competencia sintáctica, semántica y de usos intuitivos de la población (Rojano, 1985); elección de una muestra representativa de la población; estudio de casos mediante entrevistas clínicas y elaboración de un reporte de observaciones.

### **Resultados de la experimentación**

A continuación, se presenta una situación problemática representativa del modelo de enseñanza, describiendo las producciones de los estudiantes durante su resolución.

Luego de que los futuros docentes trabajaron un fenómeno de movimientos bancarios con interés simple, se les planteó un problema más del mismo estilo, pero con un interés compuesto, puesto que resulta de interés observar la forma en que hacen el tratamiento de fenómenos donde se presentan comportamientos distintos al lineal o cuadrático; en este caso, de tipo exponencial. La situación planteada fue la siguiente.

Cuando en un préstamo el porcentaje es añadido al capital y pasa a formar parte de la deuda, el interés de este nuevo capital se llama interés compuesto.

1. Supongamos que tenemos un capital de 200 pesos al 20% de interés compuesto durante 5 meses. Completa la siguiente tabla para averiguar cuánto se deberá al finalizar cada mes

Una de las principales dificultades presentadas en esta situación fue detectar el tipo de variación implicada. Para lograrlo algunos estudiantes trataron de auxiliarse de la representación gráfica, obteniendo primero una representación tabular de la situación, y en seguida graficando los valores como pares ordenados. Procedieron colocando los puntos correspondientes y luego trazaron una línea

que pasa por cada uno de éstos. Gracias a esto se comenzaba a descartar la variación lineal como correspondiente al fenómeno trabajado.

Al no conseguir definir el tipo de variación implicada, algunos estudiantes realizaron un proceso distinto, que consistió en calcular las diferencias entre los términos consecutivos y luego calcular las diferencias de las diferencias, pero al calcular la primera y segunda diferencias no obtienen valores constantes, lo cual causa aún más confusión. Incluso deciden hacer el cálculo de las terceras diferencias sin obtener un resultado que permita dotar de sentido al fenómeno. Se puede apreciar que el método se rescata como un proceso mecanizado.

Hubo otro grupo de estudiantes que también usó el método de las diferencias y tampoco les permitió determinar el tipo de variación presente en el fenómeno, pero sí fue útil para descartar la variación cuadrática como posibilidad, ya que al obtener la segunda diferencias no obtuvieron valores constantes.

El procesamiento numérico de la situación le permitió observar a dos estudiantes que, a medida que la variable independiente aumenta, las diferencias en la variable dependiente se hacen cada vez mayor. Se observa claridad en su razonamiento ya que expresan de forma cualitativa las características que tendría el gráfico si este fuera prolongado.

### **Conclusiones**

Durante la implementación del modelo de enseñanza los estudiantes realizaron distintas producciones con el objetivo de dar sentido al cambio en los fenómenos dinámicos, mediante la observación y la caracterización de éstas podemos responder a las preguntas planteadas en un inicio.

Respecto al proceso de abstracción de las nociones de cambio se identificó lo siguiente. Generalmente en un primer momento, se realiza un análisis cualitativo con el cual se identifican características del fenómeno que se modifican, las cuales son expresadas en forma de cualidades no medibles. Al profundizar en el análisis de los experimentos emerge la necesidad de medir dichas características. Las cualidades antes identificadas se refinan, para dar paso al planteamiento de magnitudes (variables) que pueden ser medidas.

Luego de determinar las magnitudes implicadas, se identifican las que cambian y las que se mantienen constantes y, a su vez, se realiza una aproximación a la clase de relación que mantienen y la dirección de dichas relaciones (dependencia).

Mediante un análisis cuantitativo, consistente en operar de forma aritmética con los datos identificados, se determinan estados específicos de las variables (uso de la variable aritmética) (regularmente el estado inicial y uno más). Al organizar la información obtenida, es posible llevar a cabo una lectura dinámica de ésta, que ayude a determinar las relaciones entre las variables.

Mediante la generalización de los procesos aritméticos empleados, es posible producir un texto algebraico que represente las relaciones (uso de la variable algebraica), dicho de otra forma: el planteamiento de una función. En algunos casos, se llevó a cabo la comprobación de la correspondencia del texto algebraico con el conjunto de estados de las magnitudes, realizando la sustitución de datos y observando si efectivamente la función representa el fenómeno.

Respecto a las actuaciones más frecuentes, se presenta una tendencia a la linealidad: cuando no se comprende el tipo de tratamiento que se debe dar al fenómeno, se optaba por un tratamiento lineal. Los estudiantes generan distintas estrategias para definir la clase de variación en los fenómenos, sin embargo, el recurso más utilizado es la producción de textos gráficos cartesianos. Mediante la observación de las características de éstos, tratan de determinar el tipo de función trabajada. Cuando se realiza la producción de un texto geométrico con poca curvatura, se tiende a definir la variación como lineal. Sin embargo, cuando es evidente que el texto geométrico presenta cierta curvatura, se tiende a definir como de tipo cuadrática.

Y por último, la dificultad más frecuente se presenta al definir el tipo de comportamiento de los fenómenos, recurren a textos aritméticos, generalmente en forma de tablas de valores. Se detectó la utilización frecuente del método de las diferencias para definir el comportamiento de la variable dependiente en los fenómenos. Aplicado de forma mecánica generalmente; la falta de sentido es evidente al trabajar con situaciones de crecimiento exponencial, donde los estudiantes manifiestan no comprender por qué nunca obtienen un valor constante, a pesar de realizar una gran cantidad de diferencias.

### Referencias

- Choate, J., Devaney, R., & Foster, A. (1999). *Iteration. A tool kit of dynamics activities*. California: Key Curriculum Press.
- Cuevas, C. y Díaz, J. (2014). La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. *El Cálculo y su Enseñanza* 5(5) pp. 165-179.
- Díaz, J. y Morales, L. (2005). El concepto de variable en los libros de texto. En H. Leyva, H. Carrillo y L. Díaz (Eds.), *XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas (I)* (pp. 39-40) Universidad de Sonora, México.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada, Departamento de didáctica de las matemáticas.
- Filloy, E. et al. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Utrecht: Reidel Publishing Co.
- Peitgen, H.-O., Jurgens, H., & Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*. New York: Springer Verlag.
- Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra. Tesis doctoral*. México: CINVESTAV-IPN.
- Rosnick, P. (1980). *The presentation of the concept of variable and the development of problem solving skills: a multi-text review*. Washington, DC: ERIC Clearinghouse.
- Ursini, S. (1994) Los niños y las variables. *Educación Matemática*, 6(3), 94-108.