

INTERACTIONS WITH GEOMETRIC FIGURES: A CASE WITH GRADUATE STUDENTS

INTERACCIONES CON FIGURAS GEOMÉTRICAS: UN CASO CON ESTUDIANTES DE LICENCIATURA

Mario Mayorga-Sánchez
Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del IPN
mario.mayorga@cinvestav.mx

Gonzalo Zubieta
Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del IPN
gzubieta@cinvestav.mx

Geometric figures can play a mediating role in students' reasoning, solving a problem, or justifying the truth of a proposition. These objects have been studied in various investigations, where the interactions that students have with figures that are constructed by the teacher or presented in a textbook have been analyzed. In this report, we describe an example of the interaction that undergraduate students had with figures constructed by us, prior to solving a task; and constructed by them during said resolution. The results show a tendency towards the empirical operations of the students on the figures with which they interacted; and the need to incorporate auxiliary elements in the figures, such as labels or segments, in order to solve the proposed tasks.

Keywords: Geometry and Geometrical and Spatial Thinking; Representations and Visualization; Reasoning and Proof; Student-figure interaction; Empirical operations

In this work we show part of an investigation with undergraduate students, in which the role of a geometric figure during the resolution of different tasks was characterized. Taking into account the work of Herbst and Arbor (2004), we describe the modes of interaction that the students had with the figures, according to the way in which they were presented: accompanied by a proposition before carrying out a task; or constructed by the student during the resolution of the task.

Literature review

Various studies have analyzed the characteristics and functions of geometric figures during the process of solving a task. Below we show a description of some investigations that have been relevant in the study of the geometric figure, and the main ideas that have emerged around this topic.

Spatial and conceptual properties of a geometric figure

A geometric figure is considered by Fischbein (1993) as a mental representation where spatial and conceptual properties of a geometric object interact. Spatial properties are those that have to do with the shape, size and position of the figure; while the conceptual properties are related to the abstract idea of a geometric object, with characteristics such as ideality and perfection.

The heuristic role of the geometric figure

Duval (1995) suggests that the geometric figure can play a heuristic role in the reasoning of an individual to solving a task. From the point of view of the author, the representation of a geometric figure can help find the main idea of a proof or support the solution of a problem.

To describe the heuristic role of the geometric figure, Duval (1995) defines four forms of apprehension: perceptual, sequential, descriptive, and operational. Particularly, the heuristic role of a figure can be presented with the operative apprehension, since this refers to the modification of a figure in such a way that ideas for the solution of a task are produced.

Difference between drawing and geometric figure

Laborde (1996) points out that a drawing is a material identity on a support (paper, for example), which acts as a signifier of a theoretical referent. In this sense, the author defines the geometric figure as a set of pairs, whose components are a geometric reference and one of the possible drawings that

represent it. Relations between the drawing and its referent are constructed and interpreted by those who produce or reads the drawing, so the meaning of a geometric figure is determined by who interacts with it.

In this investigation we use the term geometric figure when we refer to the graphic representations of objects or geometric situations, which are described in a proposition.

Research Problem

Many of the studies regarding the geometric figure analyze the interactions that an individual has with figures that are constructed and presented by a teacher or in a textbook, leaving aside the interactions with figures that are constructed by students during the resolution of a task. The purpose of this research is to investigate and describe the different interactions that undergraduate students had with geometric figures presented in two different ways: presented by us and constructed by them.

Theoretical framework

The analysis of the obtained results was made considering what was established by Herbst and Arbor (2004) regarding the modes of interaction between a subject, a diagram and a geometric object. The authors use the term diagram equivalently to what we refer to as a geometric figure; while by geometric object they refer to the referent represented in the diagram. The modes of interaction that had an impact on the results obtained are described below:

Empirical: is that interaction where a subject performs physical operations on a diagram (for example, measuring, observing or incorporating new elements). The arguments presented about these actions are restricted by the characteristics of the diagram and the properties of the instruments used (ruler, compass, etc.). In this sense, the subject considers the diagram as an equivalent of the geometric object it represents, allowing it to communicate its results based on the operations it performs.

Representational: in this mode of interaction, the subject interprets the geometric object through the graphic representation of the diagram, limiting himself to considering only the characteristics of said object established in a proposition. With this interaction the diagram does not provide additional knowledge about the geometric object, but only acts as a sign of it. Unlike the empirical interaction, the characteristics of the diagram are not restricted by physical operations, but by the geometric knowledge of the subject to interpret and represent what is established in a proposition.

The remaining modes of interaction are descriptive and generative. The first has to do with the simultaneous interpretation of the signs shown in a diagram with the properties established in a proposition, while the second suggests the joint construction of a diagram and a deductive proof. However, these modes of interaction are not reflected in the results presented here.

Method

This section describes the characteristics of the research participants, as well as the way the tasks implemented in the research were presented.

Participants

The research participants were students between 20 and 22 years old, who were chosen considering the experience suggested by their respective careers (BUAP, 2011), particularly in geometry courses.

Implemented Tasks

The tasks were applied in two different ways: a group was presented with tasks whose content was a proposition and a figure that represented it; while another group was presented with the same tasks, but showing only the proposition and suggesting that the respective figures were constructed. In each task, it was requested to justify a property of the figure based on the characteristics described in the proposition.

Results

The following results reflect significant aspects of students behavior, when interacting with pre-constructed figures and with figures constructed by them.

Results about the task with figure

The task that was implemented was the following: in the figure (Illustration 1) the parallelogram ABCD is presented, from which it is known that the points M and N are midpoints of the sides DC and AB respectively. How do you justify that the AM and CN segments are parallel?

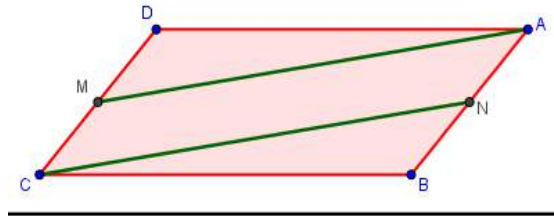


Illustration 1. Figure that accompanied the proposal of the task.

A student traced over the figure the segment MN and considered that it was the perpendicular bisector of the segments DC and AB (Illustration 2). This action was the starting point for the justification of the student's response.

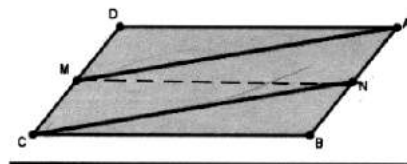


Figura 4

En la figura 4, se presenta el paralelogramo ABCD. Del cual se sabe que los puntos M y N son puntos medios de los lados DC y AB respectivamente.

¿Cómo justificas que los segmentos AM y CN son paralelos?

Si el segmento DC tiene como punto medio a M en ese punto podemos trazar su mediatriz (divide al segmento a la mitad con una recta perpendicular a dicho segmento) que sería la línea punteada esa línea es igual a la mediatriz del segmento AB pero esta línea es perpendicular, entonces al trazar las rectas MA y CN podemos decir que son paralelas.

Illustration 2. Trace made on the figure presented.

The student explicitly manifests knowledge about the properties of a perpendicular bisector, in particular, the perpendicularity of this line with the segment it divides. However, the student assumes this property without any justification and without relating it to the properties of the figure shown. The perception of the figure leads the student to affirm the parallelism of the AM and CN segments, without this affirmation having a logical support.

The form of interaction between the student and the figure is totally empirical, since the arguments are restricted by the line that he drew in the figure and his observation to argue the justification.

Results about the task without figure

The wording of the task that was only composed of one proposition was as follows: A parallelogram of vertices A, B, C and D, has as midpoints of two opposite sides the points M and N respectively (M is the midpoint of CD and N is the midpoint of AB). How do you justify that the MA and NC segments are parallel?

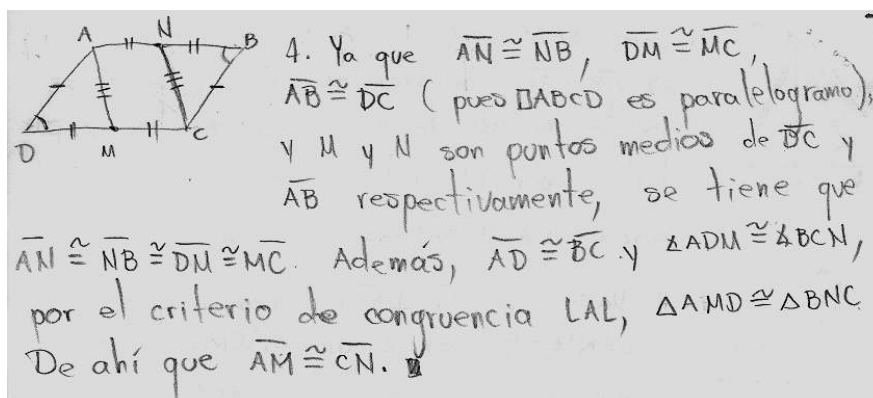


Illustration 3. Figure and student response.

Illustration 3 shows the response of a student who identifies a pair of triangles within the parallelogram that he constructed. The student argues the congruence of these triangles to justify his answer. However, the answer was inconclusive since the student did not mention that the congruence of the triangles results in the parallelism of the AM and CN segments.

The interaction of the student with the figure is representational type, since only considered the properties of the geometric object described in the proposal, to construct his figure. In addition, the characteristics of the figure constructed are restricted by the geometric knowledge of the student and not by empirical actions.

Conclusions

The figure as an object for support in solving geometric tasks involves various aspects that must be considered, one of them is the way a student interacts with a figure during the resolution of a task.

The results that we present indicate a tendency towards the empirical interaction of the students with the figures that accompany a proposition, mainly, it reflects a need to incorporate new elements on the figures. In the tasks that contained only one proposition, a need to externalize the mental image of the geometric object that was described was reflected. The representation of this object can help to keep a check on the arguments that are established to justify a property.

References

BUAP (2011). Planes de estudio. Recovered from http://emas.siu.buap.mx/portal_pprd/wb/EDUCATIVA/planes_de_estudios

Duval, R., (1995). Geometrical pictures: kinds of representational and specific processing, En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), Exploiting Mental mathematics with computers in Mathematics education, (pp. 142-157). Berlín, Alemania: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-642-57771-0

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162.

Herbst, P., y Arbor, A. (2004). Interactions with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 36(5), 129-139.

Laborde, C. (1996). Cabri-Geometra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig y J. Calderón (Eds.), Investigación y didáctica de las matemáticas, (pp. 67-85). Madrid, España: CIDE

INTERACCIONES CON FIGURAS GEOMÉTRICAS: UN CASO CON ESTUDIANTES DE LICENCIATURA

INTERACTIONS WITH GEOMETRIC FIGURES: A CASE WITH GRADUATE STUDENTS

Mario Mayorga-Sánchez
Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del IPN
mario.mayorga@cinvestav.mx

Gonzalo Zubieta
Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del IPN
gzubieta@cinvestav.mx

Las figuras geométricas pueden jugar un papel mediador en el razonamiento de los estudiantes, al resolver un problema o justificar la veracidad de una proposición. Estos objetos han sido estudiados en diversas investigaciones, donde se han analizado las interacciones que los estudiantes tienen con figuras que son construidas por el profesor o presentadas en un libro de texto. En este reporte, describimos un ejemplo de la interacción que tuvieron estudiantes de licenciatura con figuras construidas por nosotros, previo a la resolución de una tarea; y construidas por ellos durante dicha resolución. Los resultados muestran una tendencia hacia las operaciones empíricas de los estudiantes sobre las figuras con las que interactuaron; y la necesidad de incorporar elementos auxiliares en las figuras, como etiquetas o segmentos, para poder resolver las tareas propuestas.

Palabras clave: figura geométrica, interacción estudiante-figura, operaciones empíricas

En este trabajo mostramos parte de una investigación con estudiantes de licenciatura, en la que se caracterizó el papel que juega una figura geométrica durante la resolución de diferentes tareas. Tomando en cuenta el trabajo de Herbst y Arbor (2004), describimos los modos de interacción que tuvieron los estudiantes con las figuras, según la forma en que estas fueron presentadas: acompañada de una proposición antes de realizar una tarea; o construida por el estudiante durante la resolución de la tarea.

Revisión de Literatura

En diversos estudios se han analizado las características y las funciones de las figuras geométricas durante el proceso de resolución de una tarea. Enseguida mostramos una descripción de algunas investigaciones que han sido relevantes en el estudio de la figura geométrica, y las principales ideas que han surgido en torno a este tema.

Propiedades espaciales y conceptuales de una figura geométrica

Fischbein (1993) considera que una figura geométrica es una representación mental donde interactúan propiedades espaciales y conceptuales de un objeto geométrico. Las propiedades espaciales son aquellas que tienen que ver con la forma, tamaño y posición de la figura; mientras que las propiedades conceptuales están relacionadas con la idea abstracta de un objeto geométrico, con características como idealidad y perfección.

El papel heurístico de la figura geométrica

Duval (1995) sugiere que la figura geométrica puede jugar un papel heurístico durante el razonamiento de un individuo al resolver una tarea. Desde el punto de vista del autor, la representación de una figura geométrica puede ayudar a encontrar la idea principal de una prueba o apoyar la solución de un problema.

Para describir el papel heurístico de la figura geométrica, Duval (1995) define cuatro formas de aprehensión: perceptiva, secuencial, descriptiva y operativa. Particularmente, el papel heurístico de una figura se puede presentar con la aprehensión operativa, ya que esta se refiere a la modificación de una figura de tal forma que se produzcan ideas para la solución de una tarea.

Diferencia entre dibujo y figura geométrica

Laborde (1996) señala que un dibujo es una identidad material sobre un soporte (papel, por ejemplo), la cual actúa como un significante de un referente teórico. En este sentido, la autora define a la figura geométrica como un conjunto de pares, cuyos componentes son un referente geométrico y uno de los posibles dibujos que lo representan. Las relaciones entre el dibujo y su referente son

construidas e interpretadas por quien produce o lee el dibujo, así, el significado de una figura geométrica es determinado por quien interactúa con ella.

En esta investigación utilizamos el término figura geométrica cuando nos referimos a las representaciones gráficas de objetos o situaciones geométricas, las cuales se describen en una proposición.

Problema de investigación

Muchos de los estudios referentes a la figura geométrica analizan las interacciones que un individuo tiene con figuras que son construidas y presentadas por un profesor o en un libro de texto, dejando de lado las interacciones con figuras que son construidas por los estudiantes durante la resolución de una tarea. El propósito de esta investigación es indagar y describir las diferentes interacciones que estudiantes de licenciatura tuvieron con figuras geométricas presentadas de dos diferentes formas: presentadas por nosotros y construidas por ellos

Marco teórico

El análisis de los resultados obtenidos se hizo considerando lo establecido por Herbst y Arbor (2004) respecto a los modos de interacción entre un sujeto, un diagrama y un objeto geométrico. Los autores utilizan el término diagrama de forma equivalente a lo que nosotros nos referimos como figura geométrica; mientras que por objeto geométrico se refieren al referente representado en el diagrama. Los modos de interacción que tuvieron incidencia en los resultados obtenidos se describen a continuación:

Empírico: es aquella interacción donde un sujeto realiza operaciones físicas sobre un diagrama (por ejemplo, medir, observar o incorporar nuevos elementos). Los argumentos que se presentan sobre estas acciones son restringidos por las características del diagrama y las propiedades de los instrumentos que se utilizan (regla, compás, etcétera). En este sentido, el sujeto considera al diagrama como un equivalente del objeto geométrico que representa, lo que le permite comunicar sus resultados con base en las operaciones que realiza.

Representacional: en este modo de interacción el sujeto interpreta al objeto geométrico a través de la representación gráfica del diagrama, limitándose a considerar únicamente las características de dicho objeto establecidas en una proposición. Con esta interacción el diagrama no aporta un conocimiento adicional sobre el objeto geométrico, sino que actúa únicamente como un signo de este. A diferencia de la interacción empírica, las características del diagrama no están restringidas por operaciones físicas, sino por el conocimiento geométrico del sujeto para interpretar y representar lo establecido en una proposición.

Los modos de interacción restantes son el descriptivo y generativo. El primero tiene que ver con la interpretación simultánea de los signos mostrados en un diagrama con las propiedades establecidas en una proposición, mientras que el segundo sugiere la construcción conjunta de un diagrama y una prueba deductiva. Sin embargo, estos modos de interacción no están reflejados en los resultados que aquí presentamos.

Método

En esta sección se describen las características de los participantes de la investigación, así como la forma en que fueron presentadas las tareas implementadas en la investigación.

Participantes

Los participantes de la investigación fueron estudiantes de entre 20 y 22 años, quienes fueron elegidos considerando la experiencia que sugerían sus respectivas carreras (BUAP, 2011), particularmente, en los cursos de geometría.

Tareas Implementadas

Las tareas se aplicaron de dos formas distintas: a un grupo se le presentaron tareas cuyo contenido era una proposición y una figura que la representaba; mientras que a otro grupo se le presentaron las mismas tareas, pero mostrando únicamente la proposición y sugiriendo que se construyeran las respectivas figuras. En cada tarea se solicitó justificar una propiedad de la figura con base en las características descritas en la proposición.

Resultados

Los siguientes resultados reflejan aspectos significativos del comportamiento de los estudiantes, al interactuar con figuras preconstruidas y con figuras construidas por ellos.

Resultados sobre la tarea con figura

La tarea que se implementó fue la siguiente: en la figura (Ilustración 1) se presenta el paralelogramo ABCD, del cual se sabe que los puntos M y N son puntos medios de los lados DC y AB respectivamente. ¿Cómo justificas que los segmentos AM y CN son paralelos?

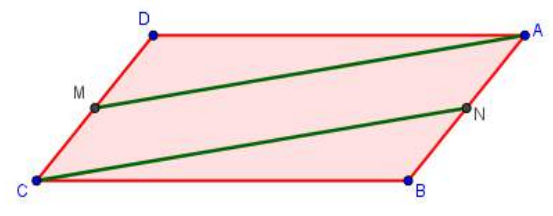


Ilustración 1. Figura que acompañó a la proposición de la tarea.

Un estudiante trazó sobre la figura el segmento MN y consideró que era la mediatriz de los segmentos DC y AB (Ilustración 2). Esta acción fue el punto de partida para la justificación de la respuesta del estudiante.

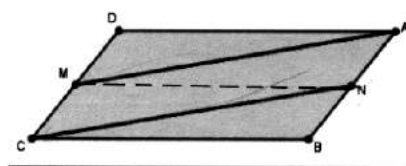


Figura 4

En la figura 4, se presenta el paralelogramo ABCD. Del cual se sabe que los puntos M y N son puntos medios de los lados DC y AB respectivamente.

¿Cómo justificas que los segmentos AM y CN son paralelos?

Si el segmento DC tiene como punto medio a M en ese punto podemos trazar su mediatriz (divide al segmento a la mitad con una recta perpendicular a dicho segmento) que sería la línea punteada esa línea es igual a la mediatriz del segmento AB pero esta línea es perpendicular, entonces al trazar las rectas MA y CN podemos decir que son paralelas.

Ilustración 2. Trazo realizado sobre la figura presentada.

El estudiante manifiesta explícitamente el conocimiento sobre las propiedades de una mediatriz, en particular, la perpendicularidad de esta recta con el segmento que divide. Sin embargo, asume esta propiedad sin ninguna justificación y sin relacionarla con las propiedades de la figura mostrada. La percepción de la figura conduce al estudiante a afirmar el paralelismo de los segmentos AM y CN, sin que esta afirmación tenga un sustento lógico.

El modo de interacción entre el alumno y la figura es totalmente empírico, ya que los argumentos están restringidos por la línea que trazó en la figura y su observación para argumentar la justificación.

Resultados sobre la tarea sin figura

La redacción de la tarea que solo estaba compuesta por una proposición fue la siguiente: Un paralelogramo de vértices A, B, C y D, tiene como puntos medios de dos de sus lados opuestos a M y N respectivamente (M es punto medio de CD y N es punto medio de AB). ¿Cómo justificas que los segmentos MA y NC son paralelos?

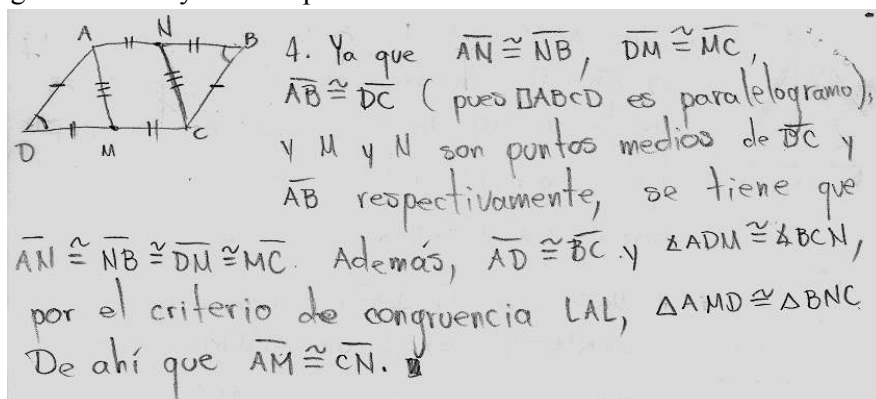


Ilustración 3. Figura y respuesta del estudiante.

En la Ilustración 3 se observa la respuesta de un estudiante quien identifica un par de triángulos dentro del paralelogramo que construyó. El estudiante argumenta la congruencia de estos triángulos para justificar su respuesta. Sin embargo, la respuesta quedó inconclusa ya que no mencionó que la congruencia de los triángulos trae como consecuencia el paralelismo de los segmentos AM y CN.

La interacción del estudiante con la figura es de tipo representacional, ya que solo consideró las propiedades del objeto geométrico, descritas en la proposición, para construir su figura. Además, las características de la figura construida están restringidas por el conocimiento geométrico del estudiante y no por acciones empíricas.

Conclusiones

La figura como objeto para el apoyo en la resolución de tareas geométricas involucra diversos aspectos que deben ser considerados, uno de ellos, es la forma en que interactúa un estudiante con una figura durante la resolución de una tarea.

Los resultados que presentamos señalan una tendencia hacia la interacción empírica de los estudiantes con las figuras que acompañan a una proposición, principalmente, se refleja una necesidad de incorporar nuevos elementos sobre las figuras. En las tareas que contenían solo una proposición se reflejó una necesidad de exteriorizar la imagen mental del objeto geométrico que se describía. La representación de dicho objeto puede ayudar a llevar un control sobre los argumentos que se establezcan para justificar una propiedad.

Referencias

- BUAP (2011). *Planes de estudio*. http://cmas.siu.buap.mx/portal_pprd/wb/EDUCATIVA/planes_de_estudios
- Duval, R., (1995). Geometrical pictures: kinds of representational and specific processing, En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental mathematics with computers in Mathematics education*, (pp. 142-157). Berlín, Alemania: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-642-57771-0
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Herbst, P., y Arbor, A. (2004). Interactions with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 36(5), 129-139.
- Laborde, C. (1996). Cabri-Geometra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig y J. Calderón (Eds.), *Investigación y didáctica de las matemáticas*, (pp. 67-85). Madrid, España: CIDE