INTRODUCING FRACTION MULTIPLICATION. A STUDY ON TEACHER'S PEDAGOGICAL KNOWLEDGE

INTRODUCIR LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES. UN ESTUDIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR

David Alfonso Páez
CONACyT-Universidad Autónoma de Aguascalientes
david.paez@edu.uaa.mx

Indira V. Medina Mendoza
Universidad Autónoma de Aguascalientes
indira.medina@edu.uaa.mx

María Guadalupe Pérez Martínez
CONACyT-Universidad Autónoma de Aguascalientes
maria.perez@edu.uaa.mx

The aim of this article is to describe the characteristics of the pedagogical knowledge used by a teacher to introduce the multiplication of fractions in elementary education. In order to achieve this aim, a sixth-grade teacher was observed while she was teaching the multiplication of fractions according to the Mexican curriculum. Results show that the teacher defines the multiplication of fractions as a repetitive sum and she uses this notion to guide students in carrying out multiplications; however, this strategy creates difficulties since the curriculum presents the fraction also as a multiplicative operator.

Keywords: Culturally Relevant Pedagogy; Teacher Knowledge; Rational Numbers; Elementary School Education.

Background

The multiplication of fractional numbers is taught in basic education. Teaching this topic is aimed at helping children in developing their mathematical reasoning, and it is considered an essential topic for understanding further contents and for applying it in their daily lives (NCTM, 2013, 2014; Lamon, 2012; SEP, 2011). It is expected that children understand the fraction as a multiplicative operator, in terms of calculating a part *of* a whole (Son, 2012). However, the different meanings of the fraction and the relationship between the factors pose difficulties for students' understanding (De Castro, 2008; García, 2014; Lamon, 2012). These difficulties might be derived also from teaching practices focused on the repetition of the fractional numbers multiplication algorithm and from the students' belief that fractions and natural numbers share the same properties and laws (De Castro, 2008). Researchers like Isiksal and Cakiroglu (2011) point out that, in the classroom, the multiplication of fractions is reduced to a routine and mechanized procedure, instead of understanding its meaning and functionality.

In addition to the conditions mentioned above, teachers might hold misconceptions regarding this content; for example, believing that the product is bigger than the factors, understanding this multiplication as a repetitive sum (Isiksal & Cakiroglu, 2011; Rifandi, 2014; Thompson & Saldanha, 2003; Valdemoros, 2010), and dealing with it as a routine problem (Chinnappan & Desplant, 2012). Yasoda (2009) states that teacher knowledge to teach the multiplication of fractions is, mainly, of algorithmic nature, which makes difficult to students to comprehend its meaning and the relationship between the factors (Son, 2012). A didactic barrier is to take as a reference the natural numbers as a way of understanding the multiplication of fractions, specifically, the rule that the product is bigger than the factors (Prediger, 2008). Related to what has been stated before, the aim of this research is to describe the didactic knowledge related to the practice of a teacher who introduces and teaches the multiplication of fractions to children in basic education.

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Reference Framework

To teach mathematics, the teacher requires, besides knowing mathematics, a didactic knowledge (Ball et al., 2008; Carrillo, Escudero & Flores, 2014; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz, 2013; Shulman 1986). This knowledge refers to a group of strategies that the teacher has to represent ideas, analogies, examples, illustrations and explanations related to a mathematical content (Chick, Baker, Pham & Cheng, 2006). The teacher is expected "to hold clear concepts, images, structures and basic approaches related to a topic…, as well as knowing how to identify in his students the difficulties and conceptual errors that they could face (problems related to the derivation rules, for example the rules related to the product, quotient **or the chain**), as well as what this means in their learning. This knowledge also requires teachers to use activities or methodological strategies so that students can identify and build new understandings based on their previous ideas" (García, 2009, p. 42).

In addition to the relevance of understanding the didactic knowledge in mathematics, it is necessary to specify the concept of multiplication of fractions when using whole numbers. Son (2012) considers that this type of multiplication makes reference to the *part-part* or *part-whole*. When the fraction involves whole numbers as a first factor (*n out of a/b*), the multiplication points out a repeated sum, where the whole number is the number of times the fraction is repeated; on the other hand, if the fraction is the first factor (*a/b out of n*) the fraction is an operator and it refers to the part that will be taken from the whole number.

Methodology

The study is qualitative, and it was designed as a case study. Data was collected through non-participant observation in order to grasp the natural context where the mathematical teaching-learning process occurs. A sixth grade teacher participated in the research; she works in a rural school in Mexico and we have named her, Elena. Lessons related to the *Multiplication of fractions* were audio and video recorded, according to the current study plan (SEP, 2011). In total, two lessons were video recorded, each lasting three hours approximately. Recordings were carried out under the informed consent of the teacher, respecting the dates and timing established by the teacher, in order to avoid affecting de natural and cultural context. In addition to the recordings, notes were taken in a fieldwork journal, to support in triangulating information.

Video-recordings were transcribed and fragmented into units of analysis. The analysis was based on Miles and Huberman (2007) framework, this allowed to identify aspects related to the didactic knowledge that Elena used when teaching the multiplication of fractions. The syllabus (SEP, 2011) posits that the student should use the fraction as a multiplicative operator through problems type *a/b out of n.* The results of class observation are shown in the following section.

Analysis

To achieve the learning objective stated in the syllabus (SEP, 2011), Elena used specific and centered strategies to help students in constructing their knowledge through the interaction with their peers, working individually and under her guidance. Elena first taught the *part-whole* concept of the fraction and implemented an activity in which she presented the multiplication of fractions. The activity is described next.

To introduce the *part-whole* concept of the fraction, Elena gave the half of a sheet paper (1/2) to 18 out of the 24 students of the group, and asked them to identify which part of the group (3/4) had a piece of paper:

Elena: How many are in total?
Students: 24!

Elena: If you are 24 and I want to give half of a paper sheet to $\frac{3}{4}$ of the class. How many of you are going to get a piece of paper?
Students: 18!

In the construction of this interpretation of the fraction, Elena induces the answer that she wants to get from students by asking directly "I want to give half of a paper sheet to $\frac{3}{4}$ of the class. How many of you are going to get a piece of paper?" Students' responses evidence their use of their previous knowledge on fractions (SEP, 2011), since they first recognized the denominator, called "whole number", then they determine that $\frac{3}{4}$ from the total of students is the same as 18. With respect to Elena's knowledge, it was noticed that she does not only expects an answer but its validation:

Elena: If I wanted to know how many halves of paper sheets I used with $\frac{3}{4}$ of you, what do I have to do? Check it out, there you have the sheets of paper… stand up and count how many [children have $\frac{1}{2}$ of a piece of paper].

This validation leads students to work on the multiplication as a repeated sum ($8\times\frac{1}{2}$) where the fraction as an operator is left out. Elena gave suggestions, such as separating into two groups, one group with the students who had a piece of paper and the other group without it, she told them: "get together or count each other". Getting students into groups allowed Elena to construct the multiplication of fractions concept, however, she formalized and institutionalized the demonstration $\frac{3}{4}$ *out of the group = 18 students* (Chevallard, 1998), and she raised the meaning of the multiplication as a repetitive sum: "What have we been doing? Counting each… a half plus a half, plus a half, plus a half, plus a half, plus a half until I completed $\frac{18}{2}$. Therefore, in the same way as in the sum, [in the multiplication] I was adding a half, plus a half…" In her discourse, it is possible to see that the multiplication is 18 students per $\frac{1}{2}$ of a paper sheet.

Elena generalized the fraction multiplication as a repetitive sum, even though she did not point out the relationship between $\frac{18}{2}$ (total halves of paper sheets) and $\frac{3}{4}$ of the class. Based on this meaning, Elena introduced new activities; for example, she asked children to solve $4\times\frac{2}{3}$ by using paper strips:

Elena: How can I multiply $4\times\frac{2}{3}$? To make this simpler, we are always going to try to write the whole numbers first, ok? In a multiplication, it is the same if I write the numbers before [as a first factor] or if I write them after [as a second factor]. But now, to make it easier, I am going to write the whole number first. Then, what do I need? Out of this paper sheet, we are going to get whole number [she gives the paper sheets to the students]. The problem says that I need four strips… because we need four whole numbers.
Students: [They measure and cut the paper sheets to obtain the strips that represent the whole numbers, as it is shown in Figure 1].

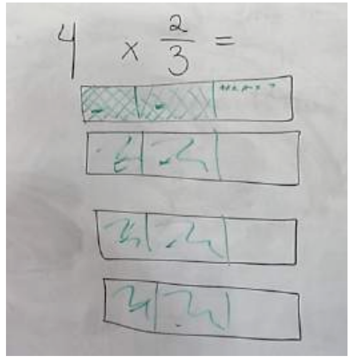

Figure 1: Graphic Representation to calculate $4\times\frac{2}{3}$.

In this activity, Elena allows students to discover the algorithm by themselves, which consists in $a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{1\times c}$. In Elena's explanation, a limitation regarding content knowledge was identified, which could influence students' comprehension on the topic, we refer to the position of the whole numbers in the multiplication of fractions (commutation property). Although the product is the same, the meaning of the factors changes; when the whole number is the first factor ($4\times\frac{2}{3}$) the multiplication represents an abbreviated sum, but when the whole number is the second factor ($\frac{2}{3}\times 4$) it corresponds to a multiplication of fractions as an operator (Son, 2012). Elena's interpretation could be based on the commutation law.

It is possible to argue that for Elena there is no difference when using the whole number as a first or second factor. Elena's argument is focused on the product, as she tells their students when institutionalizing the algorithm "To make this simpler, we are always going to try to write the whole numbers first, ok? In a multiplication, it is the same if I write the numbers before [as a first factor] or if I write them after [as a second factor]. But now, to make it easier, I am going to write the whole number first". In doing so, the difference between a reduced sum and a fraction as a multiplicative operator is not recognized.

Conclusions

Results show that as part of her didactic knowledge (SEP, 2011), Elena uses strategies and tools according to the sixth graders academic level and to the syllabus requirements, which is identified in the examples to represent graphically and to work the multiplication algorithm with rational numbers. The use of paper, as didactic tool, allowed students to represent the algorithm and the multiplication of fractions product, as Elena does in class. It is evident that through students' interaction in the classroom, they can construct and validate this content knowledge. However, in Elena's practice, we identified that the meaning of this multiplication differs from the curricular objectives, because the fraction is considered only as a repetitive sum, which can, in turn, generate comprehension problems to students. Therefore, didactic and mathematical knowledge is fundamental to comprehend the difference in meaning of *a/b out of n* and *n out of a/b.*

References

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 399-406.

Carrillo, Climent, N., Contreras, J., & Muñuz, M. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education 8* (pp. 2985-2994). Antalya: CERME. Available in http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Carrillo, J., Escudero, D., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores, 1, 16-26.
Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle,* 91-118.
Chick, H., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006). Aspects of Reachers' Pedagogical Content Knowledge for Decimals. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th annual conference of the International Group for the PME (Vol. 2, pp. 297-304). Praga: PME.
Chinnappan, M., & Desplat, B. (2012). Contextualisation of fractions: Teacher's pedagogical and mathematical content knowledge for teaching. *Journal of Science and Mathematics, 35*(1), 43-59.
de Castro, B. (2008). Cognitive models: The missing link to learning fraction multiplication and division. *Asia Pacific Education Review, 9*(2), 101-112.
García, L. (2009). *Un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas* (Doctoral Thesis). Universitat Autonòma de Barcelona, España.
García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para apoyar la práctica educativa.* Mexico: INEE.
Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 213-230.
Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. New York: Routledge.
Miles, M., & Huberman, A. (2007). *Qualitative data analysis: A sourcebook*. Beverly Hills: Sage Publications.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2013). *Supporting the Common Core State Standards for Mathematics.* Estados Unidos de América: NCTM.
National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* USA: NCTM.
Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18*(1), 3-17.
Rifandi, R. (2014). *Developing grade 5 students' understanding of multiplication of two fractions* (Master's Thesis). Surabaya State University. Available in http://www.fisme.science.uu.nl/en/impome/theses_group_2013/thesis_Ronal.pdf
Secretaría de Educación Pública (SEP). (2011). *Plan de Estudios. Educación básica. Primaria.* Mexico: SEP.
Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.
Son, J. (2012). Fraction multiplication from a Korean perspective. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(7), 388-393.
Thompson, P., & Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics,* 95-113.
Valdemoros, M. (2010). Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*, 423-440.
Yasoda, R. (2009). *Problems in Teaching and Learning Mathematics*. New Delhi: Discovery Publishing House.

INTRODUCIR LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES. UN ESTUDIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL PROFESOR

INTRODUCING FRACTION MULTIPLICATION. A STUDY ON TEACHER'S PEDAGOGICAL KNOWLEDGE

David Alfonso Páez
CONACyT-Universidad Autónoma de Aguascalientes
david.paez@edu.uaa.mx

Indira V. Medina Mendoza
Universidad Autónoma de Aguascalientes
indira.medina@edu.uaa.mx

María Guadalupe Pérez Martínez
CONACyT-Universidad Autónoma de Aguascalientes
maria.perez@edu.uaa.mx

El artículo tiene como objetivo describir el conocimiento didáctico que una profesora utiliza para introducir la multiplicación de fracciones en educación básica. Para ello se observó a una profesora de sexto grado de educación primaria (México), enseñando este contenido de acuerdo con el Plan de estudios vigente durante la toma de datos. Los resultados muestran que la docente recupera el *concepto de fracción para definir y trabajar la multiplicación de fracciones como una suma reiterativa, pero esta estrategia genera dificultades dado que el Plan de estudios plantea la fracción como operador multiplicativo.*

Palabras clave: Pedagogía culturalmente relevante; Conocimiento del Profesor; Números Racionales; Educación Primaria.

Antecedentes

La multiplicación de números fraccionarios se enseña en la educación básica, con la finalidad de que los niños desarrollen un razonamiento matemático para comprender otros contenidos de mayor complejidad y para su vida cotidiana (NCTM, 2013, 2014; Lamon, 2012; SEP, 2011). Se espera que los niños entiendan la fracción como un operador multiplicativo, en términos de calcular una parte *de* un conjunto (Son, 2012). Sin embargo, para los alumnos es difícil comprender la multiplicación de fracciones debido a los diferentes significados de la fracción y de la relación entre los factores (De Castro, 2008; García, 2014; Lamon, 2012). Tal dificultad, en ocasiones, es producto de una enseñanza centrada en la mecanización y memorización del algoritmo de la multiplicación con números fraccionarios, y debido a que los niños creen que las fracciones presentan las mismas propiedades y leyes que los números naturales (De Castro, 2008). Investigadores como Isiksal y Cakiroglu (2011) apuntan que, en el aula, la multiplicación de fracciones se reduce a un procedimiento rutinario y mecanizado, en lugar de entender su significado y su funcionalidad.

Aunque existe el compromiso de enseñar la multiplicación de fracciones, el profesor llega a tener conceptos erróneos de este contenido, por ejemplo, que el producto es mayor que los factores o generalizar su definición como una suma reiterada (Isiksal & Cakiroglu, 2011; Rifandi, 2014; Thompson & Saldanha, 2003; Valdemoros, 2010), así como abordar problemas rutinarios (Chinnappan & Desplant, 2012). Yasoda (2009) afirma que el conocimiento del profesor para enseñar la multiplicación de fracciones es, principalmente, de naturaleza algorítmica, lo cual le dificulta a los estudiantes comprender su significado y la relación entre los factores (Son, 2012). Un obstáculo didáctico es tomar como referente los números naturales para entender la multiplicación de fracciones, en específico, la regla de que el producto es mayor que los factores (Prediger, 2008). En relación con lo anterior, la presente investigación tiene como objetivo describir el conocimiento didáctico inmerso en la práctica de una profesora que introduce y enseña la multiplicación de fracciones a niños de educación básica.

Marco de referencia

Para enseñar matemáticas el profesor requiere, además de saber matemáticas, un conocimiento didáctico (Ball et al., 2008; Carrillo, Escudero & Flores, 2014; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz, 2013; Shulman 1986). Este conocimiento se refiere al conjunto de estrategias que el docente dispone para representar ideas, analogías, ejemplos, ilustraciones y explicaciones en torno a un contenido matemático (Chick, Baker, Pham & Cheng, 2006). Se espera que el profesor "tenga claro los conceptos, imágenes, estructuras y planteamientos básicos vinculados a un tema…, además sepa identificar en sus estudiantes las dificultades y errores conceptuales que enfrentarán estos (problemas con las reglas de derivación, como por ejemplo las del producto, cociente o de la cadena), así como lo que esto signifique en su aprendizaje. Este conocimiento también reclama al profesor que, mediante actividades o estrategias metodológicas, el estudiante pueda identificar y discernir sobre sus ideas previas" (García, 2009, p. 42).

Además de la relevancia de entender el conocimiento didáctico en matemáticas, es indispensable precisar el concepto de multiplicación de fracciones cuando se tiene números enteros. Son (2012) considera que este tipo multiplicación hace referencia a la *parte-parte* o *parte-todo*. Cuando involucra números enteros como primer factor (*n de a/b*), la multiplicación indica una suma reiterada, donde el entero es la cantidad *de veces* que se repite la fracción; en cambio, si la fracción es el primer factor (*a/b de n*) la multiplicación indica que la fracción es un operador y refiere *la parte que se tomará* del entero.

Metodología

El estudio es de corte cualitativo y está centrado en el estudio de casos. Se recurrió a la observación no participante con la finalidad de tener un acercamiento al contexto natural donde ocurre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la investigación participó una profesora de sexto grado de educación primaria, quien labora en una escuela rural en México y a quien hemos llamado Elena. El acopio de datos comprendió la video y audiograbación de las clases en las que Elena trató el contenido *Multiplicación de fracciones* de acuerdo con el Plan de estudios vigente en ese momento (SEP, 2011). En total se videgrabraron dos sesiones de clases, totalizando 3 horas aproximadamente. Las videograbaciones se realizaron previo consentimiento de la docente, respetando las fechas y tiempos programados por ella, de tal manera que no afectaran el escenario natural y cultural del salón de clases. Además de las grabaciones en audio y video, en una bitácora se registraron aspectos puntales de la práctica de la profesora, esto facilitó la triangulación de la información.

Las videograbaciones fueron transcritas y fragmentadas en unidades de análisis, para ello se tomó como referencia la propuesta de análisis de Miles y Huberman (2007), lo cual permitió identificar aspectos relacionados con el conocimiento didáctico que Elena pone en juego al enseñar la multiplicación de fracciones. El Plan de estudios (SEP, 2011) apunta que el alumno debe usar la fracción como *operador multiplicativo* mediante problemas de tipo *a/b de n*. En la siguiente sección se muestran los resultados de la observación en aula.

Análisis

Para lograr el objetivo de aprendizaje dado en el Plan de estudios (SEP, 2011), Elena recurrió a estrategias específicas y centradas en que los alumnos construyeran sus conocimientos a partir de interactuar con sus compañeros, trabajar de manera individual y bajo la guía de la profesora. Para ello, Elena partió del concepto de fracción como *parte-todo* y de una actividad en la cual presentó la multiplicación de fracciones. A continuación, se describe esta actividad.

Para introducir el concepto de fracción como parte-todo, Elena proporcionó media hoja de papel (1/2) a 18 de los 24 estudiantes que conforman el grupo, para que posteriormente todos determinaran qué parte del grupo (3/4) tiene papel:

> Elena: ¿Cuántos somos en total en el grupo?
> Alumnos: ¡24!
> Elena: Si son 24 y yo les quiero dar a $\frac{3}{4}$ de ustedes media hoja de papel. ¿A cuántos les voy a dar?
> Alumnos: ¡18!

En la construcción de esta interpretación de fracción, Elena induce la respuesta que espera obtener al plantearles directamente "les quiero dar a $\frac{3}{4}$ de ustedes media hoja. ¿A cuántos [estudiantes] les voy a dar?" Las respuestas de los alumnos evidencian que partieron de sus conocimientos sobre fracciones (SEP, 2011), pues primero reconocen el denominador, llamado "entero" por los alumnos, y posteriormente determinan que $\frac{3}{4}$ del total equivalen a 18 alumnos. Como características del conocimiento de Elena, se observa que involucra no sólo obtener el resultado sino que el alumno lo sustente:

Elena: Si yo quisiera saber cuántos medios de hoja me gasté en $\frac{3}{4}$ de mi salón, de mis alumnos, ¿cómo le puedo hacer? Compruébenmelo, ahí están las hojas… párense y cuenten cuántos [niños con $\frac{1}{2}$ de hoja de papel].

Esta validación le permite a Elena llevar a los estudiantes a trabajar la multiplicación como una suma reiterada ($8\times\frac{1}{2}$), donde deja de lado la fracción como operador. La profesora da sugerencias a los estudiantes, tales como hacer dos grupos, aquellos que tienen hoja de papel y quienes no la tienen, pues ella les dice: “júntense o cuéntense”. Agrupar a los estudiantes permite a Elena construir el concepto de multiplicación de fracción, sin embargo, ella es quien formaliza e institucionaliza la demostración $\frac{3}{4}$ *del grupo = 18 alumnos* (Chevallard, 1998), y plantea el significado de la multiplicación como una suma reiterativa: “¿[qué] tuvimos que ir haciendo? Contando cada… medio más medio, más medio, más medio, más medio, más medio hasta que completé los $\frac{18}{2}$. Entonces al igual que en la suma, [en la multiplicación] yo tendría que estar sumando medio, medio más…” En su discurso se evidencia que la multiplicación queda como 18 estudiantes por $\frac{1}{2}$ de hoja papel.

Elena generaliza la multiplicación de fracción como la suma reiterada, aunque no muestra la relación entre $\frac{18}{2}$ (total de medios de hojas) y $\frac{3}{4}$ de grupo. Con base en este significado de la multiplicación de fracciones, Elena introdujo nuevas actividades orientadas a que los estudiantes lo pongan en práctica; por ejemplo, les pidió resolver $4\times\frac{2}{3}$ mediante el uso de tiras de papel:

Elena: ¿Cómo puedo multiplicar cuatro enteros por $\frac{2}{3}$? Para que se nos haga más fácil vamos a tratar siempre de poner primero los enteros, ¿sí? En una multiplicación es lo mismo si lo pongo acá [como primer factor] que lo ponga acá [como segundo factor]. Pero por lo pronto, para que se nos haga más fácil, voy a poner primero los enteros. ¿Qué es lo que necesito entonces? En esta hoja vamos a ir sacando enteros [reparte hojas de papel a los alumnos]. Dice que necesito cuatro enteros, yo necesito cuatro tiras… porque son cuatro enteros.

Alumnos: [Miden y recortan las hojas de papel para obtener las tiras que representen los enteros, como se muestra en la Figura 1].

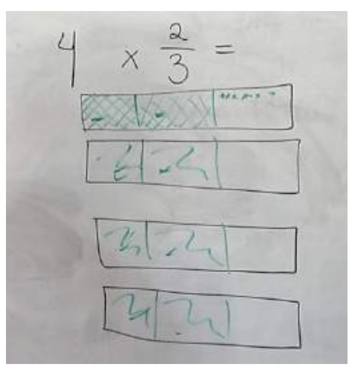

Figura 1: Representación gráfica para calcular $4\times\frac{2}{3}$.

Esta actividad Elena deja que los alumnos descubran el algoritmo de la multiplicación de fracciones por ellos mismos, el cual consiste $a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{1\times c}$. En la explicación de Elena se evidencia una limitación en el conocimiento del contenido que podría afectar la comprensión del niño acerca del tema, nos referimos a la posición de los enteros en la multiplicación de fracciones (propiedad de la conmutación). Aunque el producto es mismo, el significado de los factores cambia; cuando el entero es el primer factor ($4\times\frac{2}{3}$) la multiplicación representa una suma abreviada, pero cuando es el segundo factor ($\frac{2}{3}\times 4$) corresponde a multiplicación de fracciones como operador (Son, 2012). La interpretación de Elena podría deberse a la prevalencia de la ley de conmutación.

Es notorio que para ella no hay una diferencia de significado en cuanto al entero como primer o segundo factor. El argumento de Elena está centrado en el producto, pues como ella les dices a los estudiantes al momento de institucionalizar el algoritmo: "Para que se nos haga más fácil vamos a tratar siempre de poner primero los enteros, ¿sí? En una multiplicación es lo mismo si lo pongo acá [como primer factor] que lo ponga acá [como segundo factor]. Pero por lo pronto para que se nos haga más fácil voy a poner primero los enteros". En este sentido no se reconoce la diferencia entre una suma reducida y la fracción como operador multiplicativo.

Conclusiones

Los resultandos muestran que, como parte de su conocimiento didáctico, Elena usa estrategias y recursos acorde con el nivel educativo de los estudiantes de sexto grado de educación primaria y a las exigencias del Plan de estudios (SEP, 2011), lo cual se refleja en los ejemplos para representar gráficamente y trabajar el algoritmo de la multiplicación con números racionales. El uso de papel, como recurso didáctico, le permite al alumno representar el algoritmo y el producto de la multiplicación de fracciones, tal como Elena lo hace en la clase. Es evidente que a través de la interacción que tienen los alumnos en el salón de clases se construye y se validan los conocimientos en torno a este contenido. Sin embargo, en la práctica de Elena se evidencia cómo el significado de la multiplicación difiere con los objetivos curriculares al considerarla sólo como una suma reiterada, los cual puede generar obstáculos de compresión en el estudiante. En este sentido es fundamental un conocimiento didáctico y matemático para comprender la diferencia en los significados *a/b de n* y *n de a/b.*

Referencias

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 399-406.

Carrillo, Climent, N., Contreras, J., & Muñuz, M. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education 8* (pp. 2985-2994). Antalya: Cerme. Recuperado de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Carrillo, J., Escudero, D., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores, 1, 16-26.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle,* 91-118.

Chick, H., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006). Aspects of Reachers' Pedagogical Content Knowledge for Decimals. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th annual conference of the International Group for the PME (Vol. 2, pp. 297-304). Praga: PME.

Chinnappan, M., & Desplat, B. (2012). Contextualisation of fractions: Teacher's pedagogical and mathematical content knowledge for teaching. *Journal of Science and Mathematics, 35*(1), 43-59.

de Castro, B. (2008). Cognitive models: The missing link to learning fraction multiplication and division. *Asia Pacific Education Review, 9*(2), 101-112.

García, L. (2009). *Un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas* (tesis doctoral). Universitat Autonòma de Barcelona, España.

García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para apoyar la práctica educativa.* México: INEE.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 213-230.

Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Nueva York y Londres: Routledge.

Miles, M., & Huberman, A. (2007). *Qualitative data analysis: A sourcebook*. Beverly Hills: Sage Publications.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2013). *Supporting the Common Core State Standards for Mathematics.* Estados Unidos de América: NCTM.
National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Estados Unidos de América: NCTM.
Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18*(1), 3-17.
Rifandi, R. (2014). *Developing grade 5 students' understanding of multiplication of two fractions* (Tesis de maestría). Surabaya State University. Recuperada de http://www.fisme.science.uu.nl/en/impome/theses_group_2013/thesis_Ronal.pdf
Secretaría de Educación Pública (SEP). (2011). *Plan de Estudios. Educación básica. Primaria.* México: SEP.
Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.
Son, J. (2012). Fraction multiplication from a Korean perspective. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(7), 388-393.
Thompson, P., & Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics,* 95-113.
Valdemoros, M. (2010). Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*, 423-440.
Yasoda, R. (2009). *Problems in Teaching and Learning Mathematics*. Nueva Delhi: Discovery Publishing House.