

CONCEPTUAL SYSTEMS WHEN IMPLEMENTING MODEL-ELICITING ACTIVITIES

SISTEMAS CONCEPTUALES AL IMPLEMENTAR ACTIVIDADES PROVOCADORAS DE MODELOS

Luis E. Montero-Moguel
Universidad de Guadalajara
montero_hk@yahoo.com.mx

Verónica Vargas-Alejo
Universidad de Guadalajara
vargas.av@gmail.com

Iván I. Rodríguez-González
Universidad de Guadalajara
yelokoscross@gmail.com

In this article we analyze the results of a study focused on promoting the development of conceptual systems of teachers, associated with the teaching and learning of the exponential function when implementing Model-Eliciting Activities [MEA] in the classroom. For the theoretical framework we used the models and modeling perspective [MMP]. The methodology was qualitative, and a multilevel approach (researcher, teacher, and students) was used. The results show how the conceptual system of a teacher was modified, extended, and refined. First, the teacher focused on the instructional dimension, then he expanded, and refined to include the mathematical and historical content dimensions.

Keywords: Preparation of teachers in training, Mathematical Knowledge for Teaching, Modeling, Pre-calculation.

There is a need to carry out research related to the professional development of mathematics teachers (Doerr, 2004; Kieran, 2007; Jung, 2013; Sevinc & Lesh, 2018). According to Clark and Lesh (2003), Doerr and Lesh (2003), Sevinc and Lesh (2018) the MMP allows the description of the teachers' conceptual system related to the teaching and learning of mathematics and how this system evolves. The research question discussed in this article is: How does the teachers' conceptual system—related to the process of teaching and learning of the exponential function— evolve as they design, implement and evaluate MEAs?

Theoretical Framework

The Models and Modeling Perspective mentions that learning is a process of developing conceptual systems, which continually change, modify, extend, and refine during the student's interactions with their environment (teachers and peers) and when solving problems (Lesh, 2010). The theoretical framework used in this document is the MMP (Doerr, 2016; Lesh, 2010; Lesh & Doerr, 2003), which suggests the use of multi-level methodologies to support the development of teacher training programs. The MMP makes it possible to provide a context for students to develop models when carrying out the MEAs; at the same time, teachers are immersed in environments where the development of models is encouraged by interpreting, explaining, and predicting student behavior when modelling MEAs (Sevinc & Lesh, 2018). The interaction among students, teachers, and researchers is considered important to promote the development of knowledge, and to understand the evolution of teachers' knowledge based on the interpretation they make about how individuals reveal, test, refine, and review their knowledge and skills (Clark & Lesh, 2003). In other words, the teacher influences the construction of knowledge by students and vice versa. Something similar occurs with researchers; they influence teachers and, at the same time, are affected by them.

Doerr and Lesh (2003) propose to design didactic sequences (model development sequences) to support the development of conceptual systems. Sequences include Model Eliciting Activities [MEA], Model Exploration Activities [MXA], and Model Adaptation Activities [MAA] to promote the student to manipulate, share, modify, and reuse models to build, describe, explain, manipulate, predict or control mathematically significant systems (Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewski,

2003). Helping teachers understand the MMP and how to use it to promote mathematics learning is an interesting and complex task.

Clark and Lesh (2003) point out that knowing the nature of teacher understanding involves understanding at least three dimensions such as: “psychological connections, instructional connections, and historical connections” (p. 159). That is, how ideas develop in the minds of children and adults, how the development of ideas can be supported by the use of available curriculum materials, and the circumstances under which students develop an idea in a historical way. Therefore, the description of the teacher's conceptual system can be done through the use of dimensions such as: the teacher's mathematical knowledge dimension [DM], the instructional dimension [DI] and the historical dimension of the students' development of knowledge [DH] (Clark & Lesh, 2003). These dimensions are used to describe the teacher's conceptual system about teaching and learning of the exponential function and its evolution, or modification, extension and refinement during the process of designing, implementing, and evaluating a didactic sequence based on the MMP.

Methodology

The methodology was qualitative. The “teacher training under the models and modeling perspective” scheme was developed over 18 months, under a multilevel perspective (researcher, teacher and students) (Doerr & Lesh, 2003). The participants in this study were two teachers, but the process will only be exemplified with one of them. The data sources were: activities designed by the teacher, students' documents, audios of the interactions –student-student, teacher-student, researcher-teacher– and the students' interpretations of the created models when carrying out activities. Three stages are described, each characterized by: design, implementation and evaluation of a didactic sequence (MEA-MXA-MAA). The evolution of the teachers' conceptual system related to the teaching and learning of the exponential function is interpreted through the dimensions observed by Clark and Lesh (2003): a) DI, b) DM, and c) DH.

Results and Discussion

First stage (MEA Design-Implementation-Evaluation Cycle)

i) MEA design (researcher-teacher). The researcher encouraged the teacher to reflect on the following dimensions. a) DM: analysis of the concept of exponential function; b) DI: revision of textbooks, bibliography of the MMP, and use of technology. The teacher built an MEA in the population growth context. The underlying knowledge was the exponential function. Previously, the teacher participated as an observer in the implementation of an MEA.

ii) First implementation (teacher-students). Five students participated, which were grouped into two teams. a) DM: One of the teams included tabular, graphic, and verbal representations in their models. The other team included only tabular and verbal representations. The teacher and the students, during the group discussion, wrote the algebraic function $P(t) = P_i(1 + r)^t$ associated with the situation. b) DI: The design and implementation of the MEA enabled students to use calculators and spreadsheets to solve the problem situation. c) DH: The teacher focused on the students' interest generated by the activity and on the final representations they presented. He did not observe the process of building the model.

iii) Evaluation of the first implementation (researcher-teacher). The interaction between the teacher and the researcher allowed the interpretation and analysis of how the concept of exponential function was constructed, modified, extended and refined (DM) by the students, when carrying out the MEA (DH). Based on the review of audios, the letters of the students, and the six design principles of the MEAs, the teacher analyzed the activity (Vargas-Alejo & Montero-Moguel, 2019). The support that the researcher provided to the teacher was essential to modify the MEA before the next implementation, as well as the role of the teacher in the classroom (DI).

Second stage (Design-Implementation-Evaluation Cycle of MEA-MXA)

i) Design of MEA and MXA (researcher-teacher). The teacher's conceptual system evolved in the three dimensions. a) DM: The teacher proposed that students should perform an MXA to deepen the mathematical concepts of variation, covariation, base, exponent, ordered to the origin, growth rate, graph translation, increasing and decreasing function that emerged when carrying out the MEA. b) DI: The researcher proposed to include NetLogo –multi-agent programmable modeling environment– in the MXA. The teacher, supported by an expert researcher, modified one of the activities of the software library; he also included a GeoGebra applet in the sequence. c) DH: The modifications made by the teacher were based on the analysis of how the students created, modified, and expanded their conceptual system in the first implementation.

ii) Second implementation (teacher-students). Ten students were grouped into four teams a) DM: the four teams included tabular, graphical, algebraic and verbal representations in the models. The teacher validated all the representations, but observed that some teams did not differentiate constant growth from exponential growth, therefore, during the group discussion, he intervened through questions to clarify the difference. b) DI: The activity with NetLogo and the GeoGebra applet allowed the students to dive deeper into the concepts associated with the exponential function. c) DH: The teacher extended his interpretation and explained, in a more detailed way, the process of model construction by the students.

iii) Interaction of the researcher and the teacher after the second implementation (Researcher-Teacher). The teacher described how the students went through different cycles when they carried out the MEA. Then, he pointed out how in each cycle the students expanded and refined their knowledge of the linear function and, later, the exponential function. Finally, he mentioned how the MXA made it possible to go deeper into the mathematical concepts immersed in the models, even when it was necessary to institutionalize them (DM and DH). Based on the review of "the MEA quality assessment guide" (Lesh, 2010, p. 32) the teacher analyzed the audios and letters of the students. He characterized the models constructed by the students, with or without technology (DI) and distinguished between models that require direction, models that require extension or refinement, situated models, and comparable and reusable models.

Third stage (Design-Implementation-Evaluation Cycle of MEA-MXA-MAA)

i) Design of MAA (researcher-teacher). a) DM: The teacher, supported by the researcher, designed the MAA in the context of energy saving and investments where the concepts of linear function and exponential function are underlying. He gave meaning to the design of a model development sequence composed of MEA, MXA and MAA, to promote the development of the exponential function concept. b) DI: He designed the sequence based on Lesh et al. (2003). c) DH: The teacher enabled the transition through different modeling cycles, and encouraged students to review, deepen and expand their mathematical knowledge related to the exponential function.

ii) Third implementation (teacher-students). Ten students participated and were divided into four teams a) DM: All students construct models that include: the linear function to describe the savings situation, the exponential function to analyze investments, and a diversity of verbal, tabular, graphical and algebraic representations. b) DI: The models created to solve the problem situation included in the MAA were based on the knowledge developed using NetLogo and GeoGebra (MXA). c) DH: The teacher explained how the knowledge about the exponential function learned by the students when carrying out the MEA allowed them to carry out the MAA. The models were characterized as shareable and reusable.

iii) Interaction of the researcher and the teacher after the third implementation (researcher-teacher). The teacher described the different modeling cycles developed by the students when solving the model development sequence and analyzed how they evolved during the realization of

the MEA, MXA and MAA (DH). He used the levels of covariation (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002) and "the MEA quality assessment guide" (Lesh, 2010, p. 32) to generate a classification of the models built, in terms of the use of linear and exponential relationships (DM); the understanding of the exponential function and differentiation of the linear function; as well as the use given to the functions to interpret and predict the situation.

Conclusions

How does the teachers' conceptual system –related to the process of teaching and learning of the exponential function– evolve as they design, implement and evaluate MEAs? The evolution of the conceptual system was as follows: the emphasis was placed first on DI, then on DM, and finally, the three dimensions, DI, DM and DH, became relevant. In the first stage, the teacher focused on the description of representations created with and without the support of technology. He described whether or not the students proposed the exponential function in its algebraic form. He emphasized the final product and not the process of construction of the exponential function concept, which he did in the second stage. In the third stage, the teacher was able to describe how the students developed mathematical ideas, modified them, adapted them and refined them throughout the process of carrying out the sequence. This allowed him to realize that in the process of learning the exponential function, students can first use the linear function by assuming a constant variation and then build knowledge about the exponential function.

The MXA allowed the students to go deeper into concepts. This was observed when they carried out the MAA, as students were able to use the concepts of exponential and linear function to solve a different activity, in a different context. They learned to differentiate and use both functions to describe the MAA. The multilevel interaction between students, teacher and researcher, during each phase of the different stages was fundamental for the evolution of the conceptual system of the teacher related to the process of teaching and learning of the exponential function. Although it is true that there is no linearity in the development of conceptual systems, this study identified that the design, implementation and analysis of each activity contributed to the modification, expansion and refinement of the teacher's conceptual system.

Acknowledgment

The research reported in this paper had the support of a CONACYT scholarship for graduate programs and of the Campus Viviente project (<http://campusviviente.org>). Any opinions, findings, and conclusions expressed in this article are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the Campus Viviente project.

References

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Clark, K. K., & Lesh, R. (2003). A modeling approach to describe teacher knowledge. In R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.). (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 159-174). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. In C. R. Hirsch y A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Doerr, H. M. (2004). Teachers' Knowledge and the Teaching of Algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal, (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (Vol. 8) (pp. 267-290). USA: Kluwer Academic Publishers.
- Doerr, H. M., & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.). (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching of Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In Lester FK Jr (ed). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age, Greenwich.
- Jung, H. (2013). Pedagogical knowledge for algebra on the runway: turning research from the icme-12 into practice. In Martínez, M. & Castro Superfine, A (Eds.). (2013). *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (793-796). Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and modeling perspective on Mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), 16-48.
- Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model Development Sequences. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sevinc, S., & Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. *ZDM*, 50(1), 301–314.
- Vargas-Alejo, V. & Montero-Moguel (2019). Using Excel for the modeling of a population growth activity. In S. Otten, A. Candela, Z. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 910-918). St Louis, MO: University of Missouri.

SISTEMAS CONCEPTUALES AL IMPLEMENTAR ACTIVIDADES PROVOCADORAS DE MODELOS

CONCEPTUAL SYSTEMS WHEN IMPLEMENTING MODEL-ELICITING ACTIVITIES

Luis E. Montero-Moguel
Universidad de Guadalajara
montero_hk@yahoo.com.mx

Verónica Vargas-Alejo
Universidad de Guadalajara
vargas.av@gmail.com

Iván I. Rodríguez-González
Universidad de Guadalajara
yelokoscross@gmail.com

En este artículo se analizan resultados de una investigación centrada en promover el desarrollo de sistemas conceptuales de los profesores, asociados a la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial al implementar Actividades Provocadoras de Modelos (MEAs por sus siglas en inglés: Model-Eliciting Activities) en el aula. El marco teórico fue la perspectiva de modelos y modelación [PMM]. La metodología fue cualitativa, se usó un enfoque multinivel (investigador, profesor y estudiantes). A partir de los resultados, se observó cómo el sistema conceptual se modificó, amplió y refinó. Primero se centró en la dimensión instruccional, enseguida se amplió y refinó para incluir la dimensión de contenido matemático y dimensión histórica.

Palabras Clave: Preparación de maestros en formación, Conocimiento Matemático para la Enseñanza, Modelación, Pre-cálculo.

Existe necesidad por realizar investigaciones relacionadas con el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas (Doerr, 2004; Kieran, 2007; Jung, 2013; Sevinc & Lesh, 2018). De acuerdo con Clark y Lesh (2003), Doerr y Lesh (2003), Sevinc y Lesh (2018) la PMM permite describir el sistema conceptual de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y cómo este sistema evoluciona. La pregunta de investigación que se discute en este artículo es: ¿Cómo evoluciona el sistema conceptual de los docentes sobre la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial al diseñar, implementar y evaluar MEAs?

Marco Teórico

En la PMM se menciona que aprender matemáticas es un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales, que cambian de manera continua, se modifican, extienden o amplían y refinan a partir de las interacciones del estudiante con su entorno (los profesores y compañeros) y al resolver problemas (Lesh, 2010). El marco teórico utilizado en este documento es la PMM (Doerr, 2016; Lesh, 2010; Lesh & Doerr, 2003), la cual sugiere el uso de metodologías multinivel para apoyar el desarrollo de programas de formación docente. Este enfoque posibilita proveer un contexto para que los estudiantes desarrollen modelos al resolver MEAs; de manera simultánea, los profesores se ven inmersos en ambientes donde se propicia el desarrollo de modelos al interpretar, explicar y predecir el comportamiento de los estudiantes al modelar las MEAs (Sevinc & Lesh, 2018). Se considera importante la interacción entre estudiantes, profesores e investigadores para propiciar el desarrollo de conocimiento, además permite entender la evolución del conocimiento de los profesores a partir de la interpretación que hacen acerca de cómo los individuos revelan, prueban, refinan y revisan sus conocimientos y habilidades (Clark & Lesh, 2003). Es decir, el profesor influye en la construcción de conocimiento por los estudiantes y viceversa. Lo mismo ocurre con los investigadores, quienes influyen en los docentes y se ven afectados por los mismos.

Doerr y Lesh (2003) proponen la estructuración de secuencias didácticas para apoyar el desarrollo de sistemas conceptuales. Las secuencias incluyen Actividades Provocadoras de Modelos [MEA], Actividades de Exploración de Modelos [MXA] y Actividades de Adaptación de Modelos [MAA] para promover que el alumno manipule, comparta, modifique y reutilice modelos, para construir, describir, explicar, manipular, predecir o controlar sistemas matemáticamente significativos (Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewski, 2003). Apoyar que los profesores comprendan la PMM y la utilicen para propiciar el aprendizaje de las matemáticas es una tarea interesante y compleja.

Clark y Lesh (2003) señalan que conocer la naturaleza de la comprensión del profesor implica entender al menos ciertas dimensiones, como: “conexiones psicológicas, instruccionales e históricas” (p. 159); es decir, cómo se desarrollan las ideas en la mente de los niños y adultos, cómo puede apoyarse el desarrollo de ideas mediante el uso de materiales curriculares disponibles, y las circunstancias bajo las cuales se desarrolló una idea en los estudiantes, de manera histórica. Por lo tanto, la descripción del sistema conceptual de los docentes se puede hacer mediante el uso de dimensiones tales como: dimensión de conocimiento matemático del docente [DM], dimensión instruccional [DI] y dimensión histórica, sobre el desarrollo de conocimiento por los estudiantes [DH] (Clark & Lesh, 2003). Con estas dimensiones, se describe en este documento el sistema conceptual de un profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial y su evolución o bien modificación, ampliación y refinamiento durante el proceso de diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica fundamentada en la PMM.

Metodología

La metodología fue cualitativa. El esquema de formación de docentes bajo la PMM se desarrolló a lo largo de 18 meses, bajo una perspectiva multinivel (investigador, profesor y alumnos) (Doerr & Lesh, 2003). Los participantes en este estudio fueron dos docentes, pero sólo se ejemplificará el proceso con uno de ellos. Las fuentes de datos fueron: actividades diseñadas por los docentes, documentos de los estudiantes, audios de las interacciones estudiantes-estudiantes, docente-estudiantes e investigador-docente y los reportes de las interpretaciones a los modelos construidos por los estudiantes al realizar actividades. Se describen tres etapas, cada una caracterizada por: diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica (MEA-MXA-MAA). La evolución del sistema conceptual de los docentes sobre la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial se describe a través de las dimensiones observadas por Clark y Lesh (2003): a) DI, b) DM y c) DH.

Resultados y Análisis de Resultados

Primera etapa (Ciclo Diseño-Implementación-Evaluación de MEA)

i) Diseño de MEA (investigador- profesor). El investigador propició reflexión del docente en las dimensiones: a) DM: análisis del concepto de función exponencial; b) DI: revisión de libros de texto, de bibliografía de la PMM y uso de tecnología en la MEA. El docente construyó una MEA en el contexto de crecimiento poblacional. El conocimiento subyacente fue la función exponencial. Previamente, participó como observador en la implementación de una MEA.

ii) Primera implementación (profesor- alumnos). Participaron cinco alumnos, agrupados en dos equipos. a) DM: Uno de los equipos incluyó en sus modelos representaciones tabular, gráfica y verbal y el otro equipo, sólo tabular y verbal. El docente y los alumnos, durante la discusión grupal, construyeron la función algebraica $P(t) = P_i(1 + r)^t$ asociada a la situación. Se basaron en los modelos desarrollados en la clase. b) DI: El diseño e implementación de la MEA, contempló que los alumnos pudieran utilizar calculadoras y hojas de cálculo de Excel para que resolvieran la situación problema. c) DH: El profesor centró su atención en el interés de los alumnos generado al realizar la actividad y en las representaciones finales presentadas por los alumnos. No observó cómo fue el proceso de construcción del modelo.

iii) Evaluación de la primera implementación (investigador- profesor). La interacción entre el docente y el investigador permitió interpretar y analizar la forma como el concepto función exponencial fue construido, modificado, ampliado y refinado (DM) por los estudiantes, al realizar la actividad (DH). Con base en los seis principios de diseño de las MEAs, la revisión de audios y las cartas de los estudiantes, el docente analizó la actividad, publicada por Vargas-Alejo & Montero-Moguel (2019). El apoyo del investigador fue fundamental para modificar la MEA antes de una siguiente implementación, así como las estrategias instruccionales (DI).

Segunda etapa (Ciclo Diseño-Implementación-Evaluación de MEA-MXA)

i) Diseño de MEA y MXA (investigador- profesor). El sistema conceptual del docente evolucionó en las tres dimensiones. a) DM: El docente propuso que los alumnos deberían realizar una MXA para profundizar en los conceptos matemáticos –variación, covariación, base, exponente, ordenada al origen, tasa de crecimiento, traslación de gráficas, función creciente y decreciente– que emergieron al realizar la MEA. b) DI: El investigador propuso incluir NetLogo –el entorno de modelación programable multi-agente– en la MXA. El docente apoyado por un investigador experto modificó una de las actividades de la biblioteca del software; incluyó, además, en su secuencia un applet con GeoGebra. c) DH: Las modificaciones que realizó el docente se fundamentaron en el análisis de cómo los estudiantes habían construido, modificado y ampliado su sistema conceptual en la primera implementación.

ii) Segunda implementación (Profesor- Alumnos). Diez estudiantes fueron agrupados en cuatro equipos. a) DM: los cuatro equipos incluyeron representaciones tabulares, gráficas, algebraicas y verbales en los modelos. El docente validó todas las representaciones, pero observó que algunos equipos no diferenciaban el crecimiento constante de un crecimiento exponencial, por lo tanto, durante la discusión grupal, intervino mediante preguntas para que se aclarara la diferencia. b) DI: La actividad con NetLogo y el applet de GeoGebra permitieron que los estudiantes pudieran profundizar en los conceptos asociados a la función exponencial. c) DH: El profesor extendió su interpretación y explicó, de una manera más detallada, el proceso de construcción de modelos por los estudiantes.

iii) Interacción del investigador y el docente después de la segunda implementación (Investigador- Profesor). El docente describió cómo los alumnos transitaron por diferentes ciclos cuando realizaron la MEA, señaló cómo en cada ciclo los alumnos ampliaron y refinaron su conocimiento sobre la función lineal y, posteriormente, la función exponencial. Finalmente, mencionó cómo la MXA posibilitó la profundización en los conceptos matemáticos inmersos en los

modelos, aún cuando se requirió institucionalizarlos (DM y DH). Con base en la revisión de “la guía de evaluación de calidad de MEA” (Lesh, 2010, p. 32) el docente analizó los audios y las cartas de los estudiantes. Caracterizó los modelos construidos por los estudiantes, con o sin tecnología (DI) para distinguir entre los modelos que requieren dirección, modelos que requieren extensión o refinamiento, modelos situados, y modelos compartibles y reutilizables.

Tercera etapa (Ciclo Diseño-Implementación-Evaluación de MEA-MXA-MAA)

i) Diseño de MAA (investigador- profesor). a) DM: El docente, apoyado por el investigador, diseñó la MAA en el contexto de ahorro de energía e inversiones donde subyacen los conceptos de función lineal y función exponencial. Dio significado al diseño de una secuencia de desarrollo de modelos compuesta por MEA, MXA y MAA, para propiciar el desarrollo del concepto de función exponencial. b) DI: Él diseñó la secuencia con base en Lesh et al. (2003). c) DH: El docente posibilitó la transición por diferentes ciclos de modelación, y fomentó que los alumnos revisaran, profundizaran y ampliaran su conocimiento matemático relacionado con la función exponencial.

ii) Tercera implementación (Profesor- Alumnos). Participaron diez alumnos agrupados en cuatro equipos a) DM: Todos los alumnos construyeron modelos que incluyeron: la función lineal para describir la situación del ahorro, la función exponencial para analizar las inversiones, y una diversidad de representaciones verbal, tabular, gráfica y algebraica. b) DI: Los modelos creados para resolver la situación problema incluida en la MAA, se basaron en el conocimiento desarrollado al usar NetLogo y GeoGebra (MXA). c) DH: El profesor explicó cómo el conocimiento sobre la función exponencial, aprendido por los estudiantes al realizar la MEA, les permitió realizar la MAA. Los modelos fueron caracterizados como compartibles y reutilizables.

iii) Interacción del investigador y el docente después de la tercera implementación (Investigador- Profesor). El docente describió los diferentes ciclos de modelación desarrollados por los alumnos al resolver la secuencia de desarrollo de modelos y analizó cómo ellos evolucionaron durante la realización de la MEA, MXA y MAA (DH). Utilizó los niveles de covariación (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002) y “la guía de evaluación de calidad de MEA” (Lesh, 2010, p. 32) para generar una clasificación de los modelos construidos, en términos del uso de relaciones lineales y exponenciales (DM); de la comprensión de la función exponencial y diferenciación de la función lineal; así como del uso que se les dio a las funciones para interpretar y predecir la situación (MAA).

Conclusiones

¿Cómo evoluciona el sistema conceptual sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial de los docentes al diseñar, implementar y evaluar MEAs? El mayor énfasis se puso primero en la DI, enseguida en la DM, y finalmente, las tres dimensiones, DI, DM y DH, tomaron relevancia.

En la primera etapa el docente se concentró en describir las representaciones construidas con o sin el apoyo de la tecnología. Describió si los alumnos propusieron o no la función exponencial en su forma algebraica en su modelo. Puso énfasis en el producto final y no en el proceso de construcción del concepto de función exponencial, lo cual hizo en la segunda etapa. En la tercera etapa, el docente logró describir cómo los estudiantes desarrollaron ideas matemáticas, las modificaron, adaptaron y refinaron durante todo el proceso de realización de la secuencia. Ello le permitió concluir que, en el proceso de aprendizaje de la función exponencial, los estudiantes podrían usar primero la función lineal al suponer una variación constante y, posteriormente, construir la función exponencial.

La MXA permitió que los estudiantes lograran profundizar en conceptos matemáticos relacionados con la función exponencial. Esto se vio reflejado al realizar la MAA, ya que los estudiantes pudieron usar los conceptos sobre función exponencial y lineal para realizar una actividad distinta, en diferente contexto. Aprendieron a diferenciar y utilizar ambas funciones para describir la MAA. La interacción

multinivel entre los estudiantes, profesor e investigador, durante cada una de las fases de las distintas etapas fue fundamental para que evolucionara el sistema conceptual del docente relacionado con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial. Si bien es cierto que no existe linealidad en el desarrollo de sistemas conceptuales, en este estudio se identificó que el diseño, implementación y análisis de cada actividad contribuyó para que el sistema conceptual del docente se modificara, ampliara y refinara.

Referencias

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Clark, K. K., & Lesh, R. (2003). A modeling approach to describe teacher knowledge. In R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.). (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 159-174). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. In C. R. Hirsch y A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Doerr, H. M. (2004). Teachers' Knowledge and the Teaching of Algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal, (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (Vol. 8) (pp. 267-290). USA: Kluwer Academic Publishers.
- Doerr, H. M., & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.). (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching of Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In Lester FK Jr (ed). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Information Age, Greenwich.
- Jung, H. (2013). Pedagogical knowledge for algebra on the runway: turning research from the icme-12 into practice. In Martinez, M. & Castro Superfine, A (Eds.). (2013). *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (793-796). Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and modeling perspective on Mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), 16-48.
- Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model Development Sequences. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sevinc, S., & Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. *ZDM*, 50(1), 301-314.
- Vargas-Alejo, V. & Montero-Moguel (2019). Using Excel for the modeling of a population growth activity. In S. Otten, A. Candela, Z. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 910-918). St Louis, MO: University of Missouri.