

## DIDACTIC PURPOSES AND FUNCTIONS OF SECURITY AND DOUBT IN MATHEMATICAL CONTENTS

### FINES Y FUNCIONES DIDÁCTICAS DE LA SEGURIDAD Y LA DUDA EN CONTENIDOS MATEMÁTICOS

<p>Mirela Rigo-Lemini Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) mrigolemini@gmail.com</p>	<p>María Alejandra Bernal-Pinzón Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) male3894@gmail.com,</p>	<p>Esperanza Carolina Orozco-del-Castillo Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) esperanza.orozco@cinvestav.mx</p>
---	--	---

*The security and doubt about mathematical facts (F) that a high school student experiences are examined. Rigo-Lemini (2009; 2013) has called those states 'epistemic states of conviction' (ESC) around F. It is argued that: i) the ESCs fulfill a didactic purpose, related to the satisfaction of certain epistemic needs and that ii) those ESC function as an alarm system that informs the person about the status of those needs and as a system that prepares the person to act accordingly.*

Key words: Affect, Emotion, Beliefs; Research Methodologies; Cognition.

### Background, Problem and Research Questions

The study focuses on phenomena related to security and doubt in mathematical contents F (eg, results of mathematical tasks or operations, solving tasks' strategies). Rigo-Lemini (2013) calls these states "epistemic states of conviction around F's", denoted as "ESC". Researchers have provided evidence that security and doubts about some F are present in school mathematics (Fischbein, 1987; Segal, 2000). Likewise, experts have suggested that, in certain cases, these ESCs adequately guide mathematical work, promoting advances in learning. However, in other cases, ESCs come to have unfavorable effects on the student's decisions and actions: for example, if a student doubts a mathematical concept or rule, it is very likely that he will not use it in a problem-solving activity (Fischbein, 1987; Foster, 2016). It would be highly desirable to understand the conditions under which the phenomena described above occur. However, experts acknowledge that the phenomena of conviction around F's have been little studied in the field of mathematics education (Fischbein, 1987; Foster, 2016; Inglis, Mejia-Ramos and Simpson, 2007; Segal 2000). So, to make didactic interventions focused on the ESCs, and well-founded, it is necessary to expand the current knowledge on this topic. In order to increase these understandings about ESCs in the field of mathematics education, this manuscript answers the following two research questions: What are the didactic purposes of the ESCs that a student experienced during the resolution of a mathematical task? And what functions did those ESCs perform?

### Methods and Methodology

The research adheres to the guidelines of the Grounded Theory (GT), in the version by Corbin & Strauss (2015). GT is a form of qualitative research that offers tools to build theoretical categories, based on empirical data, in order to develop explanations about the phenomena under study. For this reason, the GT does not start from a theoretical framework; it is about developing one. To elaborate these theoretical explanations, Corbin & Strauss (2015) suggest going to what they call *context analysis* (CA). In CA it is assumed that when people act or have some internal experience they are seeking to respond to events that are significant to them, in order to cover some unmet need or to maintain circumstances to preserve satisfied needs; these events are called *conditions*. From the

conditions and from the actions or experiences that they promote, some result is usually derived, called *consequences*. In GT, explanations are constructed by applying the categories developed in the research and following the principles of CA. One of the objectives of the present investigation is to transcend the description to construct theoretical explanations; it was for this reason that GT was chosen. In addition to CA and other analytical techniques, microanalysis was applied, a tool that seeks to explore in depth the meaning of some pieces of data and that is usually used in early exploration stages.

What is reported in this manuscript is focused on a case study, about Hannia. She, like the five classmates who participated in the research (between 14 and 15 years old), were in third grade. The choice of subjects was made by the math teacher, who was asked to choose students with academic excellence. Empirical data was retrieved through a questionnaire, applied individually, that included 6 problems of missing value, 5 of them about proportional reasoning. At the end of each item students were asked to report the ESC they experienced (on a scale that included secure, partially secure, and totally unsecure) with respect to the answer given, and to explain in what reasons they based their level of secure. After the questionnaire, an unstructured interview was applied individually. Hannia was chosen because her questionnaire resolutions and her interview pronouncements and testimony provided valuable information on the nodal concepts examined in this investigation. In the following the case of Hannia is exposed; the data from the case is taken from the resolution that she offered to one of the tasks proposed in the questionnaire (the task of the skeins), as well as from her interventions in the interview.

### Description of Security and Doubt Experiences around F's. Case Report

The researchers proposed Hannia the following task: Three skeins of wool weigh 200 grams. It takes 8 to make a sweater. How much does the sweater weigh? Three elements can be distinguished in Hannia's production: strategy approach (a), the operations carried out (b) and the resolution reached (c).

1. Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter, ¿Cuánto pesa el suéter?

a)  $3 m = 200g$   $8 = \text{súeter}$

b) 
$$\begin{array}{r} 66.6 \\ 3 \overline{)200} \\ \underline{198} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \quad 1 = 66.6g \quad \begin{array}{r} 66.6 \\ \times 8 \\ \hline 532.8 \end{array}$$

c)  $12 = 532.8g$

i. La respuesta que acabas de dar es correcta:

Seguro	<input checked="" type="checkbox"/>	Parcialmente seguro	<input type="checkbox"/>	Totalmente inseguro	<input type="checkbox"/>
--------	-------------------------------------	---------------------	--------------------------	---------------------	--------------------------

ii. Explica en qué basas tu nivel de seguridad del inciso i:

En mi piece dimierb, ya que esty segura de que por la manera en que la resolví obtuve el resultado correcto.

iii. Si tuviera que resolver este ejercicio dentro de una semana, ¿Mantendrías tu respuesta?:

Si	<input checked="" type="checkbox"/>	No	<input type="checkbox"/>	Quizá	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	----	--------------------------	-------	--------------------------

Figure 1. Hannia's resolution

Although the strategy approach is not orthodox and despite omitting the reference to the quantities involved in each measurement space, Hannia's resolution is correct. Its resolution consists of two steps. In the first one, the unit value is calculated using the proportionality factor. In the second, she applied the external factor to the unit value (Cf. Vergnaud, 1985). The analysis of the episode, which is set out below, has been divided into three segments.

#### First Segment: Security in Strategy

In the questionnaire, Hannia explicitly stated her security in the strategy (See Figure 1). In the interview, when the researchers asked her "(. . .) What is your security about?" (311), she confirmed that security and expressed what it was linked to: "(. . .) I know that the procedure [strategy] that I carried out to solve it, I know it was correct ..., so that is what my security is based on" (312). By

reporting that her security in the procedure is based on the fact that she "knows that it is correct", she reveals what she needs to experience that security: she needs to know that she did the right thing. She did not base her security only on supposing that her procedure was correct, or on believing, intuiting, or imagining it (Cfr. Villoro, 2002); to be sure, she demands to know that she acted properly.

But how did Hannia know that her procedure was correct? What reasons did she rely on? Although the guarantees on which she based her knowledge does not make them explicit, in the interview she hinted at some clues about what it means for her to trust. When the researchers asked her: "Hey, for you, what is it to be sure?" (317), she responds: "(. . .) Trusting what you did or what you said or what you do... that you do not regret what you have already done, you have to be focused" (318), "(. . .) be ... like ... zero nerves, relaxed, as sure haha with what you did, that you feel satisfied" (320); to this, the researchers ask: "Satisfied with what? (321) and she responds: "(. . .) satisfied with what you achieve or what you already did" (322). She immediately takes up the topic: "(. . .) Of what I have already done, [that I did] what they asked me to do, [and] what I did was good and therefore I am relaxed" (324), and then she assures: "(. . .) [when] (. . .) I don't follow a procedure that was taught to me, I feel more unsure of the result I obtained" (340). From this, it is plausible to suppose that 'doing what they asked' (324) or 'applying a procedure they taught' (340) are the reasons on which Hannia possibly based her 'knowing' that her strategy was correct.

### **Second Segment: Insecurity in Operations (carried out on a first attempt)**

Following the chosen strategy, Hannia carried out the corresponding operations (See Figure 1). In the interview, she also outsourced the ESCs that she experienced during the execution of those operations and clarified what she based those ESCs on. Hannia comments that her security is based on the procedure performed, "(. . .) I know that the procedure I carried out to solve it, I know that the calculations I made were correct or well done, so my security is based on that" (312) and when asked her about how she knows that her calculations are correct, she expresses: "(. . .) I rectified them several times when I had already obtained the final result and I was able to make my conclusions and that's it" (314). By the type of response, it was considered important to ask if this is something that she usually does, to which she replied: "yes, when I don't feel very sure, or things like that (. . .) sometimes I do rectify my operations" (316).

As in the case of strategy, in the case of operations Hannia clarifies that she needed to know that they were correct in order to experience security, imposing on herself the epistemic need to know the correctness of the calculations to experience confidence. But, unlike the first, in this segment the student did specify the reasons on which her knowledge rested: in the verification of operations. In the interview, Hannia reveals that if she does not verify the calculations, she cannot know that they are correct and therefore she experiences insecurity around them. So, regarding her resolution of the task of the skeins, it is possible to suppose that in the first attempt, that is, in this second segment, Hannia felt insecure of her operations, because as she clarified, she verified them to be sure of the final result (314).

### **Third segment: Security in operations (performed on a second attempt) and security in the final result**

Both in its production and in the interview, Hannia left no evidence of the rectification of operations. We assume that work was done mentally. Upon achieving the goal of 'rectifying the operations multiple times', she knew they were correct (met her epistemic need to know) and felt a security experience reporting in 312: "I know (. . .) That my calculations are correct, in that is based on my security". Supported by that security, she was already able to make her conclusions (314), that is, she was able to propose with confidence her final result, 'without regret' (318), concluding the exercise.

### **Theoretical Empirical Findings: Explanations on the Didactic Purposes and Functions of Security and Doubt about H's**

From the above, it can be said that the overlapping of conditions that generated security (eg, about the strategy, or the operations) in Hannia included having achieved some *objectives* (eg, verifying operations, applying what they taught her), which it allowed her to satisfy her *epistemic need* to know that (her work was correct). As a consequence, security led her to *accept the results* that are the object of her security and to *continue with the mathematical work* in accordance with this acceptance trend. A consideration, in a sense symmetrical to the previous one, can be made regarding the insecurity that Hannia felt during her productions. The overlapping of **conditions** that generated insecurity (e. g, in operations) includes (among other factors) not having reached certain *objectives* (e. g, to verify), which prevented her from meeting her *epistemic need* to know that (her work it was well done). As a **consequence**, insecurity led Hannia to *distance* herself from the object of her doubt and led her to *carry out certain mathematical works* (in order to achieve her goals and satisfy her epistemic need to know). The categories corresponding to the conditions and those corresponding to the consequences that have been introduced in the framework of the investigation whose partial results are presented here have been highlighted with italics.

In accordance with this approach, the ESCs function as signals that inform the student whether or not an epistemic need is met. The study also reveals the effects of ESCs: when Hannia experiences security (epistemic need fulfilled), she generates a certain commitment to F and specifically directs her mathematical work towards F accordingly. When she builds an experience of doubt, in the face of unmet epistemic needs, she generates a distance or reluctance towards F and specifically guides her mathematical works in accordance with this trend.

We are then able to answer the first question, about the aims of ESCs in Hannia, or about the kinds of situations that her ESCs experiences allowed Hannia to face and resolve. A remarkable purpose of the ESCs in Hannia is that they allowed her to face and solve situations where epistemic needs are involved: when they are fulfilled, to preserve them and when they are not, to settle them.

And it is also possible to answer the second: What didactic functions did her ESCs play in solving these events? Her ESCs allowed Hannia to identify if her epistemic needs were met or not, functioning as an alarm system that keeps her informed about the status of those epistemic needs. Additionally, her ESCs also functioned as a system, coordinated with the previous one, that prepares her for action, that is, that drives her to carry out the corresponding mathematical works.

### **Final thoughts**

Research based on GT methodology is not intended to establish generalizations; however, GT allows generating understandings that can be generalized, under certain restrictions, to similar cases that adjust to conditions analogous to those studied under GT (Corbin & Strauss, 2015; Reichertz, 2007). So, it is feasible to suppose that the explanations given here can be applied to cases analogous to those of Hannia. These explanations are novel and pertinent for research in mathematics education and for its teaching and may represent the basis for the gradual theoretical construction of a compendium of understandings on the phenomenon, empirically based, that allow, in the medium term, to make didactic interventions focused on the ESCs, well oriented and ethically responsible.

### **References**

- Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4nd ed.). California, EE. UU.: SAGE Publications.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holanda: Reidel.
- Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 271-288.

- Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3-21.
- Reichertz, J. (2007). Abduction: The Logic of Discovery of Grounded Theory. En A. Bryant & K. Charmaz (Eds.), *The SAGE Handbook of Grounded Theory* (pp. 214-228). Bangalore, India: SAGE Publications Ltd.
- Rigo-Lemini, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria*. Disertación doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México, D. F. México.
- Rigo-Lemini, M. (2013). Epistemic schemes and Epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 71-91.
- Segal, J. (2000). Learning About Mathematical Proof: Conviction and Validity. *Journal of mathematical behavior*, 18 (2), 191-210.
- Vergnaud, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berna, Suiza: Editions Peter Lang, SA.
- Villoro, L. (2002). *Creer, saber, conocer*. México, D. F., México: Siglo Veintiuno Editores.

---

## FINES Y FUNCIONES DIDÁCTICAS DE LA SEGURIDAD Y LA DUDA EN CONTENIDOS MATEMÁTICOS

### DIDACTIC PURPOSES AND FUNCTIONS OF SECURITY AND DOUBT IN MATHEMATICAL CONTENTS

Mirela Rigo-Lemini Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) mrigolemini@gmail.com	María Alejandra Bernal- Pinzón Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) male3894@gmail.com,	Esperanza Carolina Orozco-del- Castillo Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) esperanza.orozco@cinvestav.mx
--	---	--

*Se examina la seguridad y la duda en torno a hechos de las matemáticas (H) que experimenta una estudiante de secundaria. A esos estados Rigo-Lemini (2009; 2013) los ha denominado 'estados epistémicos de convencimiento' (EEC) en torno a H. Se argumenta que: i) los EEC cumplen una finalidad didáctica, relacionadas con la satisfacción de ciertas necesidades epistémicas y que ii) esos EEC funcionan como un sistema de alarma que informa a la persona sobre el estatus de esas necesidades y como un sistema que prepara a la persona para actuar en consecuencia.*

Palabras clave: Afecto, Emoción, Creencias; Metodologías de Investigación; Cognición.

### Antecedentes, Problema y Preguntas de Investigación

El estudio se centra en fenómenos relacionados con la seguridad y la duda en hechos de las matemáticas H (e. g., resultados de tareas matemáticas o de operaciones; estrategias de resolución de tareas). A esos estados Rigo-Lemini (2013) los denomina *estados epistémicos de convencimiento* en torno a H's', denotados como EEC. Investigadores han aportado evidencias de que la seguridad y las dudas en torno a algún H están presentes en la matemática escolar (Fischbein, 1987; Segal, 2000). Asimismo, los expertos han sugerido que, en ciertos casos, esos EEC orientan adecuadamente el trabajo matemático, promoviendo avances en los aprendizajes. Sin embargo, en otros casos los EEC llegan a tener efectos desfavorables en las decisiones y acciones del alumno: por ejemplo, si un estudiante duda de un concepto o regla matemática, es muy probable que no la utilice en una actividad de resolución de problemas (Fischbein, 1987; Foster, 2016). Sería del todo deseable comprender las condiciones en las que se dan los fenómenos antes descritos. No obstante, los expertos reconocen que los fenómenos de convencimiento en torno a H's han sido muy poco estudiados en el ámbito de la educación matemática (Fischbein, 1987; Foster, 2016; Inglis, Mejia-

Ramos y Simpson, 2007; Segal 2000). De modo que, para hacer intervenciones didácticas centradas en los EEC, y bien fundamentadas, resulta necesario ampliar el actual conocimiento sobre ese tema. Con el fin de incrementar esas comprensiones en torno a los EEC en el ámbito de la educación matemática, en este manuscrito se responde a las siguientes dos preguntas de investigación: ¿Cuáles son los fines didácticos de los EEC que experimentó una estudiante durante la resolución de una tarea matemática? Y ¿Qué funciones desempeñaron esos EEC?

### **Métodos y Metodología**

La investigación se apega a los lineamientos de la Teoría Fundamentada (TF), en la versión de Corbin & Strauss (2015). La TF es una forma de investigación cualitativa que ofrece herramientas para construir categorías teóricas, fundadas en datos empíricos, con el fin de construir explicaciones sobre los fenómenos bajo estudio. Por eso, en la TF no se parte de un marco teórico; se trata de desarrollar uno. Para elaborar esas explicaciones teóricas, Corbin & Strauss (2015) sugieren acudir a lo que ellos llaman *análisis de contexto* (AC). En el AC se supone que cuando las personas actúan o tienen alguna experiencia interna están buscando dar respuesta, a sucesos o eventos que son significativos para ellas, con el fin de cubrir alguna necesidad no satisfecha o de mantener circunstancias para preservar necesidades satisfechas; a esos eventos se les denominan *condiciones*. De las condiciones y de las acciones o experiencias internas que propician, se suele desprender algún resultado, denominado *consecuencias*. En la TF, las explicaciones se construyen aplicando las categorías desarrolladas en la investigación y siguiendo los principios del AC. Uno de los objetivos de la presente investigación es trascender la descripción para construir explicaciones teóricas; fue por ello que se eligió la TF. Además del AC y de otras técnicas analíticas, se aplicó el microanálisis, herramienta en la que se busca explorar en profundidad, el significado de algunas piezas de datos y que se suele utilizar en estadios de exploración temprana.

Lo que se reporta en este manuscrito está centrado en un estudio de caso, el de Hannia. Ella, al igual que los cinco compañeros que participaron en la investigación (de entre 14 y 15 años), cursaban tercero de secundaria. La elección de los sujetos la realizó la maestra de matemáticas, a quien se le solicitó que fueran estudiantes con excelencia académica. Se recuperaron datos empíricos a través de un cuestionario, aplicado de manera individual, que incluía 6 problemas de valor faltante; 5 de ellos eran de proporcionalidad. Al final de cada reactivo se les pidió a los alumnos que reportaran el EEC que experimentaron (en una escala que incluía seguro, parcialmente seguro y totalmente inseguro) con respecto a la respuesta dada, y que explicaran en qué basaban su nivel de seguridad. Después del cuestionario se aplicó, de manera individual, una entrevista no estructurada. Se eligió a Hannia porque sus resoluciones al cuestionario y sus declaraciones en la entrevista brindaron información valiosa sobre los conceptos centrales que se examinan en esta investigación. En lo que sigue se expone el caso de Hannia; los datos del caso se toman de la resolución que ella ofreció a una de las tareas propuestas en el cuestionario (la tarea de las madejas), así como de sus intervenciones en la entrevista.

### **Descripción de Experiencias de Seguridad y Duda en torno a H's. Relato de un Caso**

Las investigadoras le propusieron a Hannia la siguiente tarea: Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter ¿Cuánto pesa el suéter? En la producción de Hannia se pueden distinguir tres elementos: el planteamiento de su estrategia (a), las operaciones realizadas (b) y la resolución a la que llegó (c).

1. Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter. ¿Cuánto pesa el suéter?

a)  $m = 200g$ ,  $8 = \text{suéter}$

b) 
$$\begin{array}{r} 66.6 \\ 31200 \\ \times 8 \\ \hline 252.8 \end{array}$$

c)  $R = 532.8g$

ii. La respuesta que acabas de dar es correcta:

Seguro	<input checked="" type="checkbox"/>	Parcialmente seguro	<input type="checkbox"/>	Totalmente inseguro	<input type="checkbox"/>
--------	-------------------------------------	---------------------	--------------------------	---------------------	--------------------------

ii. Explica en qué basas tu nivel de seguridad del inciso i:

En mi procedimiento, ya que estoy segura de que por la manera en que lo resolví obtuve el resultado correcto.

iii. Si tuviera que resolver este ejercicio dentro de una semana, ¿Mantendrías tu respuesta?

Si	<input checked="" type="checkbox"/>	No	<input type="checkbox"/>	Quizá	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	----	--------------------------	-------	--------------------------

Figura 1. Producción Hannia

Aunque el planteamiento de la estrategia no es ortodoxo y a pesar de que omite la referencia a las cantidades involucradas en cada espacio de medida, la resolución de Hannia es correcta. Su resolución consta de dos pasos. En el primero calcula, mediante el factor de proporcionalidad, el valor unitario. En el segundo aplica el factor externo al valor unitario (Cf. Vergnaud, 1985). El análisis del episodio, que se expone en lo que sigue, se ha dividido en tres segmentos.

### Primer Segmento: Seguridad en la Estrategia

En el cuestionario Hannia manifestó de manera explícita su seguridad en la estrategia (V. Figura 1). En la entrevista, cuando las investigadoras le preguntaron “(. . .) ¿A qué se debe tu seguridad?” (311), ella confirmó esa seguridad y expresó a qué estaba ligada: “(...) sé que el procedimiento [estrategia] que realicé para solucionarlo, sé que pues fue correcto..., entonces en eso se basa mi seguridad” (312). Al reportar que su seguridad en el procedimiento está basada en que ella ‘sabe que es correcto’, deja ver lo que necesita para experimentar esa seguridad: ella necesita saber que procedió de manera acertada. Ella no basó su seguridad sólo en suponer que su procedimiento fue correcto, o en creerlo, intuirlo o imaginarlo (Cfr. Villoro, 2002); para estar segura, ella se exige saber que actuó adecuadamente.

Pero ¿Cómo supo Hannia que su procedimiento era correcto? ¿En qué razones se apoyó? Aunque las garantías en las que sustentó su saber no las explicita, en la entrevista insinuó algunas pistas sobre lo que para ella significa confiar. Al preguntarle: “Oye y para ti ¿Qué es estar segura?” (317), ella responde: “(. . .) confiada de lo que tú hiciste o lo que dijiste o lo que haces... que no te arrepientas de lo que ya hiciste, tienes que estar como centrada” (318), “(. . .) estar... como que... cero nervios, relajada, como segura jaja con lo que tú realizaste, que te sientas satisfecha” (320); a esto se le pregunta: “¿Satisfecha de qué? (321) y ella responde: “(. . .) como de lo que logras o lo que ya hiciste” (322). En seguida retoma: “(. . .) de lo que ya hice, [que hice] lo que me pidieron, [y] lo que hice estuvo bien y por ello estoy relajada” (324), y después asegura: “(. . .) [cuando] no (. . .) sigo un procedimiento que me enseñaron sí me siento más insegura del resultado que obtuve” (340). De esto, es plausible suponer que el ‘hacer lo que le pidieron’ (324) o el ‘aplicar un procedimiento que le enseñaron’ (340) son las razones en las que posiblemente Hannia basó su ‘saber’ que su estrategia era correcta.

### Segundo Segmento: Inseguridad en las Operaciones (realizadas en un primer intento)

Siguiendo la estrategia elegida, Hannia realizó las operaciones correspondientes (V. Figura 1). En la entrevista ella también externalizó los EEC que experimentó durante la ejecución de esas operaciones, y aclaró en qué basaba esos EEC. Hannia comenta que su seguridad la basa en el procedimiento realizado, “(. . .) sé que el procedimiento que realicé para solucionarlo, sé que pues fue correcto, o estuvo bien los cálculos que yo hice, entonces en eso se basa mi seguridad” (312) y al preguntarle sobre cómo sabe que sus cálculos están bien, ella expresa: “(. . .) los rectifiqué varias veces cuando ya había obtenido el resultado final y ya fue que pude hacer mis conclusiones y ya” (314). Por la respuesta, se consideró importante preguntar si eso es algo que ella suele hacer, a lo que

ella respondió: “sí, cuando no me siento muy segura, o cosas así (. . .) a veces sí rectifico mis operaciones” (316).

Al igual que en el caso de la estrategia, en el de las operaciones Hannia aclara que necesitaba saber que eran correctas para poder experimentar seguridad, imponiéndose la necesidad epistémica de saber de la corrección de los cálculos para experimentar confianza. Pero, a diferencia del primero, en este segmento la alumna sí especificó las razones en las que descansó su saber: en la verificación de operaciones. En la entrevista, Hannia revela que, si ella no verifica los cálculos, no puede saber que son correctos y por tanto ella experimenta inseguridad en torno a ellos. Así que, respecto a su resolución de la tarea de las madejas, es posible suponer que en el primer intento, es decir, en este segundo segmento, Hannia se sintió insegura de sus operaciones, pues como ella aclaró, las verificó para estar segura del resultado final (314).

### **Tercer segmento: Seguridad en las operaciones (realizadas en un segundo intento) y seguridad en el resultado final**

Tanto en su producción como en la entrevista, Hannia no dejó evidencia de la rectificación de operaciones. Suponemos que ese trabajo fue hecho de manera mental. Al lograr el objetivo de ‘rectificar varias veces’ las operaciones, supo que eran correctas (satisfizo su necesidad epistémica de saber) y sintió una experiencia de seguridad que reporta en 312: “sé (. . .) que mis cálculos son correctos, en eso se basa mi seguridad”. Pertrechada en esa seguridad, ya pudo hacer sus conclusiones y ya (314), es decir, pudo proponer con toda confianza su resultado final, ‘sin arrepentirse’ (318), dando por terminado el ejercicio.

### **Hallazgos Teórico Empíricos: Explicaciones sobre los Fines y las Funciones Didácticas de la Seguridad y la Duda en torno a H's**

De lo antes expuesto se puede decir que el imbricado de **condiciones** que generaron seguridad (e.g., sobre la estrategia, o las operaciones) en Hannia incluyó el haber alcanzado algún *objetivo* (e.g., verificar operaciones, aplicar lo que le enseñaron), lo cual le permitió satisfacer su *necesidad epistémica* de saber que (su trabajo era correcto). Como **consecuencia**, la seguridad la llevó a *aceptar los resultados* objeto de su seguridad y a *continuar con el trabajo* matemático en concordancia con esa tendencia de aceptación. Una consideración, en cierto sentido simétrica a la anterior, se puede hacer con respecto a la inseguridad que Hannia sintió durante sus producciones. El imbricado de **condiciones** que en ella generaron inseguridad (e.g., en las operaciones) incluye (entre otros factores) el no haber alcanzado ciertos *objetivos* (e.g., el de verificar), lo que le impidió cubrir su *necesidad epistémica* de saber que (su trabajo estaba bien hecho). Como **consecuencia**, la inseguridad llevó a Hannia a *tomar distancia* del objeto de su duda y la llevó a *realizar ciertos trabajos matemáticos* (con el fin de alcanzar sus objetivos y satisfacer su necesidad epistémica de saber). Se han resaltado con letras itálicas las categorías correspondientes a las condiciones y las correspondientes a las consecuencias que se han introducido en el marco de la investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen.

De acuerdo con este planteamiento, los EEC funcionan como señales que le informan a la estudiante si una necesidad epistémica está o no solventada. El estudio también deja ver los efectos de los EEC: cuando Hannia experimenta seguridad (necesidad epistémica cumplida) genera un cierto compromiso con H y orienta específicamente sus trabajos matemáticos hacia H conforme a ello. Cuando construye una experiencia de duda, ante necesidades epistémicas insatisfechas, genera una distancia o reticencia hacia H y orienta específicamente sus trabajos matemáticos de acuerdo con esa tendencia.

Se está entonces en condiciones de responder a la primera pregunta, sobre los fines de los EEC en Hannia, o sobre el tipo de situaciones que sus experiencias de EEC le permitieron a Hannia afrontar y

resolver. Un propósito destacable de los EEC en Hannia, es que le permitieron enfrentar y solventar situaciones donde están involucradas necesidades epistémicas: cuando están cumplidas, para preservarlas y cuando no lo están, para saldarlas.

Y también es posible responder a la segunda: ¿Qué funciones didácticas desempeñaron sus EEC en la resolución de esas incidencias? Sus EEC le permitieron identificar a la estudiante si sus necesidades epistémicas estaban satisfechas o no, funcionando como un sistema de alarma que la mantiene informada sobre el estatus de esas necesidades epistémicas. Adicionalmente, sus EEC funcionaron también como un sistema, coordinado con el previo, que la prepara para la acción, esto es, que la impulsa a la ejecución de los trabajos matemáticos correspondientes.

### Consideraciones finales

Las investigaciones basadas en la metodología de la TF, no tienen la finalidad de establecer generalizaciones; no obstante, la TF permite generar comprensiones que se pueden generalizar, bajo determinadas restricciones - a casos semejantes que se ajusten a condiciones análogas a los estudiados bajo la TF (Corbin & Strauss, 2015; Reichertz, 2007). De modo que es viable suponer que las explicaciones aquí dadas se pueden aplicar a casos análogos a los de Hannia. Esas explicaciones resultan novedosas y pertinentes para la investigación en educación matemática y para su enseñanza y pueden representar la base para la paulatina construcción teórica de un compendio de comprensiones sobre el fenómeno, fundamentadas empíricamente, que permitan, a mediano plazo, hacer intervenciones didácticas centradas en los EEC, bien orientadas y éticamente responsables.

### Referencias

- Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4th ed.). California, EE. UU.: SAGE Publications.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holanda: Reidel.
- Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 271-288.
- Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3-21.
- Reichertz, J. (2007). Abduction: The Logic of Discovery of Grounded Theory. En A. Bryant & K. Charmaz (Eds.), *The SAGE Handbook of Grounded Theory* (pp. 214-228). Bangalore, India: SAGE Publications Ltd.
- Rigo-Lemini, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria*. Disertación doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México, D. F. México.
- Rigo-Lemini, M. (2013). Epistemic schemes and Epistemic states. A study of mathematics conviction in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 71-91.
- Segal, J. (2000). Learning About Mathematical Proof: Conviction and Validity. *Journal of mathematical behavior*, 18 (2), 191-210.
- Vergnaud, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berna, Suiza: Editions Peter Lang, SA.
- Villoro, L. (2002). *Creer, saber, conocer*. México, D. F., México: Siglo Veintiuno Editores.