MENTAL CONSTRUCTIONS OF INVARIANT SUBSPACE DEVELOPED BY AN APOS TEACHING DESIGN

CONSTRUCCIONES MENTALES SOBRE SUBESPACIO INVARIANTE DESARROLLADAS EN UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DESDE LA TEORÍA APOE

Irenisolina Antelo-López
Universidad de Sonora
ireni1095@gmail.com

César Fabián Romero-Félix
Universidad de Sonora
cesar.romero@unison.mx

We present some of the preliminary results of a project about how the concept of eigenspace can be learned as special invariant subspace. The study is based on the theoretical and methodological elements of the APOS framework. Specifically, we present the part of the preliminary genetic decomposition, obtained from the theoretical analysis, corresponding to the concept of invariant subspace; as well as the criteria for classifying and contrasting the mental structures proposed in the genetic decomposition with those manifested during and after the instructional stage by eight students of Mathematics who participated in the study.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking, Algebra and Algebraic Thinking, Technology, Design Experiments

The application of the concept of eigenspace and the link it has with various key concepts of Linear Algebra have guided various investigations regarding its learning. Wawro, Watson, and Zandieh (2019) point out that students find it difficult to argue when linear combinations of eigenvectors are eigenvectors, showing confusion to distinguish between a base for a given eigenspace and elements of such subspace; They conclude that: " A focus on eigenspaces as subspaces has the potential to mitigate these challenges and help students see connections across the linear algebra course" (p. 1122). Therefore, a study was carried out with the purpose of *analyzing the cognitive structures that a student might need for the learning of eigenspaces as invariant subspaces*, so that the cognitive demand of this task can be clarified. Some preliminary results about the difficulties in developing such mental constructs are presented below.

APOS theoretical framework

The APOS framework was chosen since it is a cognitive theory that allows a structural analysis on the learning of mathematical concepts and poses specific relationships between the cognitive analysis of mathematical learning and the design of teaching materials and experiments (Oktac, Trigueros & Romo, 2019). The model defines these stages as mental structures and classifies them as *Action, Process, Object* and *Schema* (hence the acronym APOS), which arise from the application of specific mental mechanisms: *internalization, encapsulation, coordination, reversal, de-encapsulation* and *thematization* (Arnon et al., 2014).

With an **Action** structure, an individual performs transformations to previously constructed *Objects* and its main characteristic is that each step of the transformation must be carried out explicitly, in a given order, by the individual and needs to be guided by external instructions. The **Process** structure comes from the *internalization* of an Action in a Process or by the *coordination* of different Processes into a new one. In the first case, the same operation is performed as the Action that is internalized, but in the individual's mind, achieving control over the transformation; in the second, the interaction of different processes leads to the development of a new one that in a certain way includes both. When it is possible to apply transformations onto the Process and such transformations can be constructed, the Process has been *encapsulated* in an **Object**. The **Scheme** structure has a

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

different nature from the previous three, as it develops as a network of Action, Process and Object structures, as well as relationships between them; for example, a differential calculus scheme can be described as network centered on the concept of function (Arnon et al., 2014). The specific focus of this work leads us to study the first types of constructions and not include the development of Schemes.

The hypothetical model that explains the set Actions, Processes and Objects, as well as the mental mechanisms that a person could need for the construction of a specific mathematical concept is called *genetic decomposition*.

Methodology

Research in the APOS framework is commonly carried out following its *research cycle*, which consists of three components: *theoretical analysis, design and implementation of instruction,* and *data collection and analysis* (Arnon et al., 2014, p. 94). From the theoretical analysis a preliminary genetic decomposition is obtained, the teaching design generates sequences that seek to facilitate the mental structures and mechanisms proposed in the genetic decomposition; and from the collection and analysis of data, the *preliminary* genetic decomposition and the teaching design are obtained. Preliminary results of each methodological phase are presented below.

Theoretical analysis

Based on a review of various Linear Algebra books (Axler, 2015; Frieldberg, Insel & Spence, 1982) and research related to learning the concept of eigenspace (Sierpinska et al., 1999; Soto & García, 2002; Thomas & Stewart, 2011; Gol Tabaghi & Sinclair, 2013; Wawro et al., 2019), it was concluded that the need to compare a vector subspace with its image implied thinking that the image of an eigenspace satisfies that its image is the same subspace or the zero subspace. Likewise, that for the development of a conception of eigenspace as invariant, it was relevant that conceptions of both concepts were constructed first and that relations between eigenspaces and invariant subspaces were later determined.

It was determined that for the learning of *invariant-eigenspace*, students were required to have previous conceptions of *generated subspace*, *linear transformation*, and *eigenvalues and eigenvectors*.

In the preliminary genetic decomposition, the construction of eigenspace starts from invariant subspaces, followed by invariant one-dimensional and then *larger* subspaces (2 and 3 dimensions), eigenspaces, and then relationships between these structures are analyzed. The proposed concepts for invariant subspace are described below.

The **Action A_1** consists of manipulating the *spanning vector Object*, a single vector that spans a one-dimensional subspace, by applying a linear transformation (defined from $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$), identifying cases in which the image of the subspace is itself or the zero subspace. When Action A1 is repeated for different subspaces and different linear transformations, the reflecting on the results allows the internalization into **Process P_1.** This process allows the observing, assuming or arguing that the subspace generated by some vector is invariant without having to manipulate specific cases of subspaces or linear transformations.

Process P_1 is coordinated with the *spanned subspace Process* to obtain **Process P_3**, with this Process it is expected that students can identify that the images of the generators of an invariant subspace are not necessarily scalar multiples of themselves; to argue that the invariant subspaces are those subspaces that satisfy that the generators of the *image subspace* can be expressed as a linear combination of the spanning vectors of the subspace and recognize that the image of the generator set of the subspace does not generate the invariant subspace if the null subspace is different from the zero subspace.

Design and implementation of instruction

The ACE Teaching Cycles proposed from APOE were taken as a reference. These cycles are made up of three stages that give the cycle its name: *Activities* to initiate the development of mental structures; *Class discussions* to promote mental mechanisms; and *Exercises* to reinforce the mental constructions developed by the students (Arnon et al., 2014, p.58).

The design consists of four ACE type sequences. In sequence 1, students are familiarized with the graphic representations of the concepts and with the use of GeoGebra applets, additionally, previous conceptions about the concepts of generated subspace and linear transformations are evaluated. In sequence 2, the development of Action A1 and Process P1 is promoted; this paper refers to the second sequence. For the activity phase, an applet was designed available at: bit.ly/g-act1. The activity begins with the graphic exploration of the image of a one-dimensional subspace, line *l*, which can be modified by changing the spanning vector of the subspace. Each of the buttons T_1, T_2, T_3, T_4 and T_5, is associated with a different linear transformation and they are distributed by teams, while the group discussion is focused on the similarities and differences between the five cases.

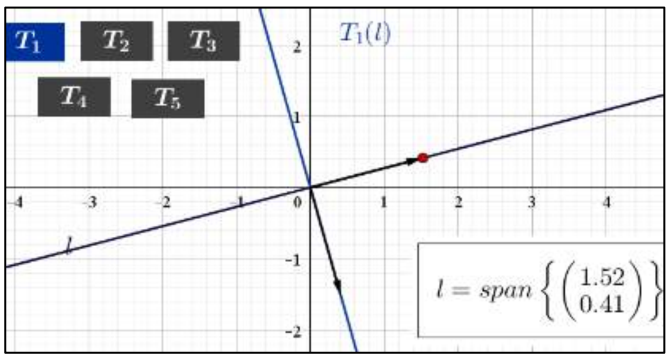

Figure 1 Sequence 2 GeoGebra applet

The implementation of the sequences here reported was carried out with eight students of the Bachelor of Mathematics enrolled in a second Linear Algebra course, the data and analysis shown below correspond to sequence 2, whose implementation was carried out in 3 sessions of 50 minutes.

Data collection and analysis

The student worksheets collected in the implementation stage complemented with notes and recordings of the class discussions constitute the data analyzed. A non-comparative case study was carried out, which sought to contrast the proposed structures from the theoretical analysis with those expressed by the students in their written productions. The following table shows a couple of student responses to a problem in the exercise section designed to assess Action A_1 conception.

Table 1 Differences in the development of conception Action A1.

Let $P_2(\mathbb{R})$ be the vector space of grade 2 or lower polynomials with real coefficients, and $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a linear transformation such that $T(p) = p'$. Determine if a) $P_2(\mathbb{R})$ and b) $span\{x^2\}$, invariant subspaces under T	
Student **E1** set $p(x) = a + bx + cx^2$ and calculated the image of vector p, realizing that $T\big(p(x)\big) \in P_2(\mathbb{R})$ and concluding that the subspaces was invariant. In b), following a similar procedure, compared αx^2 with $span\{x^2\}$ and concluded that the subspace was not invariant because $T(\alpha x^2) = 2\alpha x \notin span\{x^2\}$.	Student **E3** set $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, calculated its image and concluded that: "it is T-invariant because T(p) is a polynomial with grade equal or lower than 2, for each $p \in P_2(\mathbb{R})$". However, for b) he took an arbitrary αx^2, calculating that $T(\alpha x^2) = \alpha 2x \in P_2(\mathbb{R})$, finally concluding that, since for every $u \in span\{x^2\}$, $T(u)$ was a polynomial of grade 2 or lower.
Action	Pre-action

Student E1 can apply the definition for the specific subspace, determining whether or not it is met; this implies that she can determine for specific cases that the subspace is invariant if its image is the same subspace or the zero subspace. E1 resorts to a previous conception of set containment that involves thinking that given two sets A and B, $A \subseteq B$ if and only if for any $a \in A$ it is satisfied that $a \in B$, which is considered part of Action A_1 . In the case of E3, the initial procedure performed by the student is correct, however, the student does not recognize that in order to conclude that the subspace is or is not invariant, he must determine if $T(\alpha x^2) \in span\{x^2\}$. In his answer, he also does not write explicitly which is the subspace that is invariant under the transformation; the absence of this part of the action classifies it as an action in progress or pre-action.

Similarly, the responses for the other conceptions of the genetic decomposition are analyzed for its evaluation.

Discussion and preliminary conclusions

In general terms, the evaluation of sequence 2 allowed evaluating both the proposed mental structures from the theoretical analysis, as well as the design and implementation of teaching corresponding to Action A_1 and process P_1. The continuation of the analysis will allow evaluating the rest of the genetic decomposition and the teaching design.

The classification of the responses in terms of the concepts shown allowed us to identify the correctly developed mental structures and those that were emerging, as in the pre-action cases, in some cases showing they were not compatible with the preliminary genetic decomposition.

Regarding the Activities problems, the student responses were mostly classified as compatible with the described mental structure linked to them, although in several cases the structures are manifested in a developmental stage (Arnon et al., 2014, p. 139), this was primarily observed in responses in which the work was based on graphical representations, the students seemed to understand and be able to work the situation according to the required mental structure, however they found it difficult to give a sufficiently clear argument that would validate what they said; students showed better arguments when situation were stated in algebraic representations. This difficulty was associated with the fact that the students who participated in the study were unfamiliar with the graphic representations.

References

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. and Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York: Springer.

Axler S. (2015). *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (1982). *Algebra lineal*. Publicaciones Cultural.

Gol Tabaghi, S. & Sinclair, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning, 18* (3), 149-164.
Oktaç, A., Trigueros, M., & Romo, A. (2019). APOS Theory: Connecting Research and Teaching. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 33-37.
Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathematique*, *19*(1), 7–41.
Soto, J. L. & García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. In *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level.*
Thomas, M. O. & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal, 23* (3), 275-296.
Wawro, M., Watson, K. & Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM Mathematics Education*, 1-13. doi: 10.1007/s11858-018-01022-8.

CONSTRUCCIONES MENTALES SOBRE SUBESPACIO INVARIANTE DESARROLLADAS EN UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DESDE LA TEORÍA APOE

MENTAL CONSTRUCTIONS OF INVARIANT SUBSPACE DEVELOPED BY AN APOS TEACHING DESIGN

Irenisolina Antelo-López
Universidad de Sonora
ireni1095@gmail.com

César Fabián Romero-Félix
Universidad de Sonora
cesar.romero@unison.mx

Se presentan algunos de los resultados preliminares de un proyecto en el que se analiza cómo se puede aprender el concepto de espacio propio como subespacio invariante especial. El estudio se sustenta en los elementos teóricos y metodológicos del marco APOE. Específicamente, se muestra la parte de la descomposición genética preliminar correspondiente al concepto de subespacio invariante, así como los criterios utilizados para el análisis de datos que permitieron clasificar y contrastar las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética con las manifestadas durante y después de la etapa de instrucción por ocho estudiantes de la licenciatura en Matemáticas que participaron en el estudio.

Palabras clave: Pensamiento Matemático Avanzado, Álgebra y Pensamiento Algebraico, Tecnología, Experimentos de Diseño

Los campos de aplicaciones del concepto de espacio propio y el vínculo que tiene con diversos elementos del Álgebra Lineal han guiado diversas investigaciones sobre su aprendizaje. Wawro, Watson y Zandieh (2019) señalan que a los estudiantes se les dificulta argumentar cuándo combinaciones lineales de vectores propios son vectores propios, mostrando confusión para distinguir entre una base del espacio propio con los elementos del subespacio; concluyen que: "un enfoque en los espacios propios como subespacios tiene el potencial de mitigar estos desafíos y ayudar a los estudiantes a ver las conexiones a través del curso de álgebra lineal" (p. 1122). Por lo anterior, se realizó un estudio con el propósito *analizar las estructuras cognitivas que un estudiante podría necesitar en el aprendizaje de espacios propios como subespacios invariantes*, de manera que se pueda aclarar la demanda cognitiva de esta tarea. Se presentan a continuación algunos resultados preliminares acerca de las dificultares para desarrollar tales construcciones mentales.

Marco teórico APOE

Se eligió el marco APOE ya que es una teoría cognitiva que permite un *análisis estructural* sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos y plantea relaciones específicas entre el análisis cognitivo del aprendizaje matemático y el diseño de materiales y experimentos de enseñanza (Oktac, Trigueros & Romo, 2019). El modelo define estas etapas como estructuras mentales y las clasifica como *Acción, Proceso, Objeto* y *Esquema* (de aquí las siglas APOE), que surgen de la aplicación de mecanismos mentales específicos: *interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación y tematización* (Arnon et al., 2014).

La estructura **Acción** el individuo realiza transformaciones sobre Objetos previamente construidos y se caracteriza porque cada paso de la transformación debe realizarse explícitamente por el individuo y necesita ser guiado por instrucciones externas. La estructura **Proceso** es desarrollada a partir de la *interiorización* de una Acción en un Proceso o por la *coordinación* de distintos Procesos. En el primer caso, se realiza la misma operación que la Acción que se está interiorizando, pero en la mente del individuo, logrando la toma de control sobre la transformación; en el segundo la interacción de Procesos distintos conlleva al desarrollo de uno nuevo que de cierta manera incluye a ambos. Cuando es posible aplicar transformaciones sobre el Proceso y se pueden construir tales transformaciones, el Proceso ha sido encapsulado en un **Objeto**. La estructura de **Esquema** tiene una naturaleza distinta a las tres anteriores, al desarrollarse como una red de estructuras Acción, Proceso y Objeto, así como relaciones entre éstas; por ejemplo, se puede describir un esquema de Cálculo diferencial como centrado en el concepto de función (Arnon et al., 2014). El enfoque puntual del presente trabajo nos lleva a estudiar los primeros tipos de construcciones y no incluir el desarrollo de esquemas.

El modelo hipotético que explica el conjunto Acciones, Procesos y Objetos, así como los mecanismos mentales que una persona podría necesitar para la construcción de un concepto matemático específico es llamado *descomposición genética*.

Metodología

Las investigaciones en el marco APOE se realizan comúnmente siguiendo su *ciclo de investigación*, el cual consta de tres componentes: *análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y recolección y análisis de dato*s (Arnon et al., 2014, p. 94). Del análisis teórico se obtiene una descomposición genética preliminar, el diseño de enseñanza genera secuencias que buscan favorecer las estructuras y mecanismos mentales propuestos en la descomposición; y de la recolección y análisis de datos se obtiene la valoración de la descomposición genética preliminar y el diseño de enseñanza. Se presenta a continuación resultados preliminares de cada etapa metodológica.

Análisis teórico

A partir de la revisión de diversos libros de Álgebra lineal (Axler, 2015; Frieldberg, Insel & Spence,1982) e investigaciones relacionadas con el aprendizaje del concepto de espacio propio (Sierpinska et al., 1999; Soto & García, 2002; Thomas & Stewart,2011; Gol Tabaghi & Sinclair, 2013; Wawro et al., 2019) se concluyó que la necesidad de comparar el subespacio con su imagen implicaba pensar en que la imagen del espacio propio satisface que su imagen es el mismo subespacio o el subespacio cero. Así mismo, que para el desarrollo de una concepción de espacio propio como invariante era relevante que se construyeran primero concepciones de ambos conceptos y que después se determinaran relaciones entre espacios propios e invariantes.

Se determinó que para el aprendizaje del concepto de *espacio propio invariante* se requería que los estudiantes tuvieran concepciones previas de subespacio generado, transformación lineal y valores y vectores propios.

En la descomposición genética preliminar se proponen concepciones para el aprendizaje de espacio propio partiendo de subespacios invariantes. Se construyen concepciones sobre subespacios invariantes unidimensionales y de dimensión mayor, espacios propios y luego se analizan relaciones entre estas estructuras. A continuación, se describen las concepciones propuestas para subespacio invariante.

La concepción **Acción $\mathbf{A_1}$** consiste en manipular el *Objeto de vector generador*, mediante la aplicación de una transformación lineal (definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$), identificando casos en los que la imagen del subespacio es él mismo o el subespacio cero. Cuando la Acción A_1 se repite para diferentes subespacios generados y diferentes transformaciones lineales, reflexionando sobre los resultados, se puede interiorizar en un **Proceso $\mathbf{P_1}$** que permite observar, suponer o argumentar que el subespacio generado por algún vector es invariante sin tener que manipular casos específicos de subespacios o transformaciones lineales.

El Proceso P_1 se coordina con el *Proceso de subespacio generado* para obtener el **Proceso $\mathbf{P_3}$**, con este Proceso se espera que los estudiantes puedan identificar que en general las imágenes de los generadores del subespacio invariante no son necesariamente múltiplos escalares de sí mismos; argumentar que los subespacios invariantes son aquellos subespacios que satisfacen que los generadores del subespacio imagen se pueden expresar como combinación lineal del conjunto generador del subespacio y reconocer que la imagen del conjunto generador del subespacio no genera al subespacio invariante si el subespacio nulo es diferente del subespacio cero.

Diseño e implementación de enseñanza

Se tomaron como referencia los *Ciclos de enseñanza ACE* propuestos desde APOE. Estos ciclos se componen de tres etapas que dan nombre al ciclo: ***A**ctividades* para iniciar el desarrollo de las estructuras mentales; *Discusiones de **C**lase* para promover los mecanismos mentales; y ***E**jercicios* para reforzar las construcciones mentales desarrolladas por los estudiantes (Arnon et al., 2014, p.58).

El diseño consiste en cuatro secuencias de tipo ACE. En la *secuencia 1* se familiariza a los estudiantes con las representaciones gráficas de los conceptos y con el uso de applets en GeoGebra y se valoran concepciones previas sobre los conceptos de subespacio generado y transformaciones lineales. En la *secuencia 2*, se promueve el desarrollo de la Acción A_1, Proceso P_1 y Proceso P_2; el documento se refiere a esta segunda secuencia. Para la actividad se diseñó un applet disponible en: bit.ly/g-act1. La actividad inicia con la exploración gráfica de la imagen de un subespacio unidimensional, la recta l, que puede modificarse al cambiar el vector generador del subespacio. Cada uno de los botones T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5, está asociado a una transformación lineal distinta y se distribuyen por equipos para luego discutir grupalmente las semejanzas y diferencias entre los cinco casos.

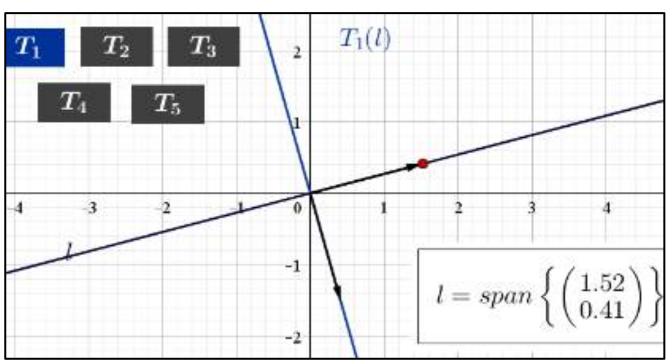

Figura 1 Applet de la Secuencia 2

La implementación de las secuencias que aquí se reporta se realizó con ocho estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas inscritos a un curso de Álgebra Lineal II, los datos y el análisis que se muestra a continuación corresponden a la secuencia 2, cuya implementación se llevó a cabo en 3 sesiones de 50 minutos.

Recolección y análisis de datos

Se analizan las hojas de trabajo de las estudiantes, recolectadas en la etapa de implementación, complementando con notas y grabaciones de las discusiones de clase. Se realizó un estudio de caso no comparativo, con lo cual se buscó contrastar las estructuras propuestas a partir del análisis teórico con las manifestadas por los estudiantes en sus producciones escritas.

En la siguiente tabla se muestran un par de respuestas de estudiantes ante un problema de la sección de ejercicios diseñado para evaluar la concepción Acción A_1.

Tabla 1 Diferencias en el desarrollo de la concepción Acción A_1.

Sea $P_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos, con coeficientes reales y $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que $T(p) = p'$. Determine si a) $P_2(\mathbb{R})$ y b) $span\{x^2\}$, son subespacios invariantes bajo T	
La estudiante **E1**, tomó $p(x) = a + bx + cx^2$ y calculó la imagen del vector, llegando a que $T\big(p(x)\big) \in P_2(\mathbb{R})$ concluyendo que el subespacio era invariante. En b) realizó un procedimiento similar, comparando αx^2 con $span\{x^2\}$ y concluyó que el subespacio no era invariante porque $T(\alpha x^2) = 2\alpha x \notin span\{x^2\}$.	La Estudiante **E3**, en el caso a) tomó $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, cálculo su imagen y concluyó: "Es T-invariante ya que $T(p)$ es un polinomio de grado menor a dos $\forall\, p \in P_2(\mathbb{R})$". Sin embargo, para el caso b) consideró un elemento arbitrario del subespacio αx^2, llegando a que $T(\alpha x^2) = \alpha 2x \in P_2(\mathbb{R})$ finalmente concluyó que se trata de un *T-invariante,* debido a que para todo $u \in span\{x^2\}$, $T(u)$ era "un polinomio de grado menor a 2".
Ejemplo de Acción	Ejemplo de Pre-acción

La estudiante E1 puede aplicar la definición para el subespacio específico, determinando si éste satisface o no la definición; esto implica que puede determinar para casos específicos que el subespacio es invariante si su imagen es el mismo subespacio o el subespacio cero. Se observa que E1 recurre a una concepción previa de *contención* que involucra pensar que dados dos conjuntos A y B, $A \subseteq B$ si y solo si para cualquier $a \in A$ se satisface que $a \in B$, lo cuál se considera parte de la Acción A_1. En el caso de E3, el procedimiento inicial realizado por la estudiante es correcto, sin embargo, la estudiante no reconoce que para poder concluir que el subespacio es o no invariante debe determinar si $T(ax^2) \in span\{x^2\}$, en su respuesta tampoco escribe explícitamente cual es el subespacio que es invariante bajo la transformación; la ausencia de esta parte de la acción lo clasifica como acción en desarrollo o pre-acción.

De manera similar se analizan las respuestas para las demás concepciones de la descomposición genética para su evaluación.

Discusión y conclusiones preliminares

En términos generales la valoración de la secuencia 2 permitió evaluar tanto las estructuras mentales propuestas a partir del análisis teórico, como el diseño e implementación de enseñanza correspondiente a la Acción A_1 y proceso P_1. La continuación del análisis permitirá evaluar el resto de la descomposición genética y el diseño de enseñanza.

La clasificación de las respuestas en términos de las concepciones mostradas permitió identificar las estructuras mentales correctamente desarrolladas y las que estaban emergiendo, como en los casos de pre-acciones, en algunos casos de forma no compatible con la descomposición genética preliminar.

En relación con los reactivos de las secuencias, las respuestas mayormente se clasificaron como compatibles con la estructura mental descrita, aunque en varios casos las estructuras se manifiestan en etapa de desarrollo (Arnon et al., 2014, p. 139), esto se observó primordialmente en respuestas en las que se trabajaba con las representaciones gráficas, los estudiantes parecían entender y poder trabajar la situación de acuerdo con la estructura mental requerida, sin embargo les costaba dar una argumentación suficientemente clara que validará lo que decían; los estudiantes mostraron mejores argumentaciones cuando el trabajo que se solicitaba involucraba representaciones algebraicas. Esta situación se asoció a que los estudiantes que participaron en el estudio se encontraban poco familiarizados con las representaciones gráficas.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York: Springer.

Axler S. (2015). *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (1982). *Algebra lineal*. Publicaciones Cultural.

Gol Tabaghi, S. & Sinclair, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning, 18* (3), 149-164.

Oktaç, A., Trigueros, M., & Romo, A. (2019). APOS Theory: Connecting Research and Teaching. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 33-37.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathematique*, *19*(1), 7–41.

Soto, J. L. & García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. En *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level.*

Thomas, M. O. & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal, 23* (3), 275-296.

Wawro, M., Watson, K. & Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM Mathematics Education*, 1-13. doi: 10.1007/s11858-018-01022-8.