

## TYPES OF PROBLEMS LINKED TO THE DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC REASONING IN CHILEAN PRIMARY EDUCATION

### TIPOS DE PROBLEMAS VINCULADOS AL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA CHILENA

Ana Luisa Llanes Luna  
Universidad de Los Lagos  
analuisa.llanes@alumnos.ulagos.cl

Silvia Elena Ibarra Olmos  
Universidad de Sonora  
silvia.ibarra@unison.mx

Luis R. Pino-Fan  
Universidad de Los Lagos  
luis.pino@ulagos.cl

*The Chilean Curricular Bases of primary education (students from 6 to 12 years old), establish in the Patterns-and-algebra axis that algebraic thinking will be developed through a problem-solving approach. However, international research shows that working with the algebraic objects involved in these types of problems is not the only way of enhancing the development of such thinking; there is another type of arithmetic-nature-problem which also enhances it at proto-algebraic level. This paper aims to identify and characterize this type of problems, associated with the Numbers-and-operations axis in the official Chilean textbooks. For this, the model of Algebrization Levels is considered as a theoretical reference, which is a theoretical-methodological tool proposed by the Onto-Semiotic Approach of mathematical knowledge and instruction.*

### Background

There are approximately three decades in which educational authorities and researchers in the field of Mathematics Education have shown a great interest in introducing algebraic ideas to the primary education curriculum. The introduction of these ideas aims to develop algebraic reasoning in students from 6 to 12 years old. This approach is currently known as Early Algebra. There are studies at a global level (Cai, 2004; Fong, 2004; Lew, 2004; Watanabe, 2008) developed under this approach, which have identified the characteristics with which these ideas have been introduced into the curriculum.

In the Mexican context, Aké and Godino (2018) state that, although the tasks proposed in the first-grade textbook are not aimed at promoting algebraic thinking in children, since numerical register is prioritized, some implicit algebraic objects are identified in some mathematical tasks and, from the authors' perspective, those tasks guide towards proto-algebraic ways of thinking. In the case of Colombia, Castro, Martínez-Escolar, and Pino-Fan (2017) report the promotion of algebraic reasoning through mathematical tasks from first to sixth grade of primary education which, for example, at the first grade include expressing numerical sentences in an equivalent way ( $42 - 9 = 43 - \square$ ), and solving numeral sentences ( $\square + 4 = 4$ ). Those tasks require, for instance, solving inequalities and then graphing the solution, verifying numerical conjectures, etc. Finally, in the American context, four standards of algebraic context are established: understanding of patterns, relations and functions; representation and analysis of mathematical situations and structures using algebraic symbols; use of mathematical models to represent and understand quantitative relations; and the analysis of change in various contexts (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

These studies, and others, have shown that currently there is no consensus in the field on the characteristics of algebraic reasoning and, even more, on what is meant by this concept. Thus, in Blanton and Kaput (2011), they refer to it as an activity of generalization of mathematical ideas. In addition, the work with undetermined quantities, the use of variables, algebraic symbolization, relations between quantities, unknowns, equations, patterns, and the study of change, are considered as other notions related to the development of algebraic reasoning. In addition, other studies relate the development of this type of reasoning based on the work with some notions of arithmetic. These

results somehow support and justify the existence of the Early Algebra approach, which emerged as a counterweight to the curricular separation created between arithmetic and algebra. Molina (2009) points out that some authors suggest that this separation accentuates and prolongs the difficulties of students. This is why the work with activities that enable the transition and integration of algebra and arithmetic is proposed, with a different approach to the computational one (which predominates in the first grade) and that benefits the development of algebraic and arithmetic modes of thinking.

In the Chilean context, the few studies developed to characterize algebraic reasoning, focus on how algebraic ideas are introduced to the primary education curriculum. Mejías (2019) published a study on the presence of algebra in Chilean textbooks from first to sixth grade of primary education, and its incorporation into the national curriculum, focusing the attention on the Patterns-and-algebra axis. This axis, together with Numbers-and-operations, Geometry, Measurement, and Data-and-probability axes, are part of the curricular organization proposed in the Curricular Bases (Ministry of Education of Chile [MINEDUC], 2018) from first to sixth grade of primary education (students aged 6 to 12 years old). Particularly, with the study of concepts such as pattern, in this axis it is expected that the bases for the development of more abstract mathematical thinking at higher levels, especially algebraic reasoning, will be established (MINEDUC, 2018). However, in the Numbers-and-operations axis it is expected that some concepts that promote this type of reasoning can be identified. As a consequence of the above, in this work it is proposed to characterize a typology of problems, related to the Numbers-and-operations axis in the Chilean context, which promote algebraic reasoning.

### Theoretical And Methodological Aspects

This work is based on the theoretical notions developed by the Onto-Semiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (Godino, Batanero, & Font, 2007, 2019), specifically on the Algebrization Levels model (Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014). This model is considered as a theoretical-methodological tool, which allows characterizing algebraic reasoning in terms of the representations used, the generalization processes, involved, as well as the analytical calculation that is put into play during the (personal or institutional) mathematical practice related to a type of algebraic task. It should be noted that this model has been implemented in other studies, and it has been evident that it is a good predictor of (intended or assigned) algebrization levels for mathematical tasks in textbooks collections (e.g., Aké & Godino, 2018; Castro, Martínez-Escobar, & Pino-Fan, 2017).

The levels related to Primary Education are listed below, which are of particular interest to this work.

- Level 0 (*absence of algebraic reasoning*): mathematical objects are expressed through natural, numerical, iconic, or gestural language; if symbols that refer to an unknown value intervene, the result of such value is obtained by operating on particular objects.
- Level 1 (*incipient level of algebrization*): properties, numerical equivalences, and relations from particular tasks are identified; languages are natural, numerical, iconic, or gestural.
- Level 2 (*intermediate level of algebrization*): mainly, undetermined quantities or variables expressed in symbolic or symbolic-literal language intervene, in order to refer to recognized intensives, although linked to information from the spatial-temporal context.
- Level 3 (*consolidated level of algebrization*): intensive objects, represented in a symbolic-literal way, are generated and operated on; transformations of algebraic (symbolic) expressions are performed.

It is pertinent to clarify that these levels are not established by the problem itself, but by the practice (or practices) developed to solve the problem. A mathematical practice is defined as “any action or

manifestation (linguistic or otherwise) carried out by somebody to solve mathematical problems, to communicate the solution to other people, so as to validate and generalize that solution to other contexts and problems” (Godino & Batanero, 1994, p. 334).

This work has a qualitative nature (León & Montero, 2003). The research technique is content analysis (Gil-Flores, 1994), specifically focused on mathematical practices (proposed in official textbooks). The analysis is carried out following these phases: 1) preliminary study and selection of problems related to the Numbers-and-operations axis, 2) resolution of the selected problems and detailed analysis of mathematical practices, and finally 3) the categories of problems are generated. Namely, mathematics textbooks distributed by the Chilean Ministry of Education for primary education levels are analyzed. In this work, we particularly report the results obtained from the first and second grade mathematics textbooks.

### **Preliminary Results**

The analysis evidenced that a series of institutional mathematical practices proposed in the context of the Numbers-and-operations axis, would enable the development of algebraic reasoning. Arithmetic is seen by several researchers as a key access to algebra (Warren, 2003). For example, Carpenter, Frankie and Levy (2003) state that, when studying algebra, students do not understand that the procedures they use to solve equations and simplify expressions are based on the properties of numbers. Meanwhile, Molina (2009) argues that “being able to count requires working algebraically since it is necessary to have a structured and organized way of counting” (p. 137, personal translation from Spanish). Therefore, it is considered that, despite the gap between arithmetic and algebra in the context of Chilean Primary Education, the problem situations included in the textbooks and their respective practices, would serve as promoters of algebraic reasoning at incipient levels (specifically, levels 0 and 1).

19 types of problems have been identified in the first-grade textbook (16 related to the Numbers-and-operations axis; 3 related to the Patterns-and-algebra axis), and in the second-grade textbook, 21 types of problems were characterized (18 related to the Numbers-and-operations axis; 3 related to the Patterns-and-algebra axis). The problems belonging to the Patterns-and-algebra axis are not considered in this study, because the current curricular document already established that these kinds of problems develop algebraic thinking (MINEDUC, 2018). In the case of the Numbers-and-operations axis, the entire typology of problems has been quantified, however, attention is only focused on those which promote algebraic reasoning through their mathematical practices. Among the typology of problems, related to the first and second grade of primary, the following can be found:

- Apply the algorithm of composing and decomposing numerical quantities to solve problems.
- Compare quantities (greater than, less than or equals to, it is more than, it is less than,  $<$ ,  $>$ ,  $=$ ).
- Identify the condition to know when an element belongs to a set.
- Identify and represent the cardinality of a set by means of a number.
- Operate numerical quantities (addition or subtraction).

The practices promoted by the typologies of previous problems are related to a level 0 of algebraization (absence of algebraic reasoning), that is, mathematical objects are mainly represented in the numerical, iconic or mother language. Numerical quantities (extensive objects) are decomposed as the sum of two (or more) numerical quantities. In addition, tabular representations are used to organize the information, mainly when using algorithms for addition and subtraction. The concept-definitions are: addition, subtraction, compose, decompose, abacus, place value, additive decomposition, etc. The procedures are related to the use of algorithms, and they are also supported

by the use of materials such as the abacus. Propositions and arguments are primarily related to how numbers can be decomposed or composed in accordance with the place value of their digits.

On the other hand, level 1 (*incipient level of algebrization*) has only been identified in the practices promoted in the second-grade textbook, in which the typology of problems related to them is as follows:

- Identify the additive properties of natural numbers (commutative, associative) (5 problems),
- Identify the properties of multiplication of natural numbers (existence of multiplicative neutral, zero property of multiplication) (10 problems).

Among the algebraic objects identified the following can be found: notion of an unknown value, structure properties, notion of a numerical equivalence. Practices at this level allow us to identify that extensive objects (examples) intervene that explicitly promote generalization (a rule) through mother language. Properties and relations are identified from the structural tasks.

### Projections

Analogously to the analysis developed for the first and second grade textbooks, it is intended to characterize typologies of problems related with the development of algebraic reasoning for the remaining texts, from third to sixth grade of primary education, but not only for the Numbers-and-operations axis, but in Patterns-and-algebra axis too. It is considered that a characterization of this nature will allow identifying the didactic-mathematical knowledge that primary teachers should have in order to develop instructional processes in accordance with curricular approaches.

### Acknowledgements

This work has been funded by Research Project FONDECYT nr. 1200005, granted by Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), Chile.

### References

- Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2), 171-201. <https://doi.org/10.24844/em3002.07>
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2)
- Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the Chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 107-130.
- Castro, W., Martínez-Escobar, J. y Pino-Fan, L. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: Análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 6(2), 164-191. <http://doi.org/10.17583/redimat.2017.1981>
- Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 39-59.
- Gil-Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos. Aplicaciones a la investigación educativa*. Barcelona, España: PPU.
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.

- León, O. G. y Montero, I. (2003). Metodologías cualitativas. En O. G. León y I. Montero (Eds.), *Métodos de Investigación en Psicología y Educación* (3ra ed.) (pp. 138-177). Madrid, España: McGraw-Hill.
- Lew, H.-C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 88-106.
- Mejías, C. A. (2019). *Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria* (Tesis doctoral). Recuperado desde Repositorio Digital de la Universidad de Girona. (<http://hdl.handle.net/10256/17137>)
- Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Bases curriculares primero a sexto básico*. Santiago de Chile, Autor.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 3(3), 135-156.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, EE.UU.: Autor.
- Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook*. Reston, EE.UU.: National Council of Teachers of Mathematics.

---

## TIPOS DE PROBLEMAS VINCULADOS AL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA CHILENA

### TYPES OF PROBLEMS LINKED TO THE DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC REASONING IN CHILEAN PRIMARY EDUCATION

Ana Luisa Llanes Luna  
Universidad de Los Lagos  
[analuisa.llanes@alumnos.ulagos.cl](mailto:analuisa.llanes@alumnos.ulagos.cl)

Silvia Elena Ibarra Olmos  
Universidad de Sonora  
[silvia.ibarra@unison.mx](mailto:silvia.ibarra@unison.mx)

Luis R. Pino-Fan  
Universidad de Los Lagos  
[luis.pino@ulagos.cl](mailto:luis.pino@ulagos.cl)

*En las Bases Curriculares de primaria (6 a 12 años) de Chile, se establece que con el estudio de problemas del eje de Patrones y álgebra se desarrollará el pensamiento algebraico. Sin embargo, investigaciones internacionales han demostrado que no sólo el trabajo con los objetos algebraicos involucrados en ese tipo de problemas potencia el desarrollo de dicho pensamiento, sino que existe otra tipología de problemas, de índole aritmética, que también lo promueve en niveles conocidos como proto-algebraicos. En este trabajo se pretende identificar y caracterizar esa tipología de problemas, asociados al eje de Números y operaciones, en los textos escolares oficiales de Chile. Para ello, se considera como referente teórico el modelo de Niveles de Algebrización, herramienta teórico-metodológica propuesta en el Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos.*

Palabras clave: álgebra y pensamiento algebraico, análisis del currículo, educación primaria

### Antecedentes

Aproximadamente son tres décadas en las que autoridades educativas e investigadores del campo de la Educación Matemática han mostrado un gran interés por introducir ideas algebraicas al currículo de educación básica. La introducción de estas ideas al currículo tiene por objetivo el desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes entre los 6 y 12 años. A este enfoque se le conoce actualmente como Early Algebra. Existen investigaciones a nivel mundial (Cai, 2004; Fong, 2004; Lew, 2004; Watanabe, 2008), elaboradas dentro de este enfoque, que han dado cuenta de cuáles son las características con las que dichas ideas han sido introducidas al currículo.

En el contexto mexicano, Aké y Godino (2018) declaran que, si bien las tareas propuestas en el texto de estudio de primer año de primaria no están dirigidas a promover un pensamiento algebraico

en los niños, puesto que se prioriza el registro numérico, sí se identifican algunos objetos algebraicos implícitos en algunas tareas matemáticas y que, desde la perspectiva de los autores, orienta hacia formas de pensamiento proto-algebraico. En el caso de Colombia, Castro, Martínez-Escobar y Pino-Fan (2017), reportan la promoción del razonamiento algebraico a través de tareas matemáticas desde primero a sexto grado de educación primaria, las que, en el primer grado, por ejemplo, contemplan expresar sentencias numéricas de manera equivalente ( $42 - 9 = 43 - \square$ ), resolver sentencias numéricas ( $\square + 4 = 4$ ), que requieren, por ejemplo, resolver inecuaciones y luego graficar la solución, verificación de conjeturas numéricas, etc. Finalmente, en el contexto estadounidense, se establecen cuatro estándares de contenido algebraico: comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y analizar el cambio en diversos contextos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Estas investigaciones, y otras más, han demostrado que actualmente no existe un consenso en el campo sobre las características del razonamiento algebraico y, más aún, qué se entiende por este concepto. Así, en Blanton y Kaput (2011), se refieren a éste como una actividad de generalización de ideas matemáticas. Además, se considera al trabajo con cantidades indeterminadas, el uso de variables, la simbolización algebraica, las relaciones entre cantidades, las incógnitas, las ecuaciones, los patrones, el estudio del cambio, como otras nociones asociadas al desarrollo del razonamiento algebraico. Otros estudios, además, relacionan el desarrollo de este tipo de razonamiento a partir del trabajo con algunas nociones de la aritmética. Estos resultados de alguna manera abonan y justifican la existencia del enfoque Early Algebra, el cual surgió como contrapeso a la separación curricular creada entre la aritmética y el álgebra. Molina (2009), señala que algunos autores sugieren que esta separación acentúa y prolonga las dificultades de los alumnos y es por ello que se propone trabajar actividades que posibiliten la transición e integración de ambas, con un enfoque diferente al computacional (el cual predomina en los primeros cursos escolares) y que beneficie el desarrollo de modos de pensamiento algebraico y aritmético.

En el contexto chileno, los pocos trabajos desarrollados para caracterizar el razonamiento algebraico se centran en cómo son introducidas las ideas algebraicas al currículo de educación básica. Mejías (2019), elabora un estudio de la presencia del álgebra en los libros de texto chilenos de primero a sexto año de enseñanza básica y su incorporación en el currículo nacional, centrando su atención en el eje Patrones y álgebra. Este eje, en conjunto con Números y operaciones, Geometría, Medición y Datos y probabilidades, forman parte de la organización curricular propuesta en las Bases Curriculares (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018) de primero a sexto básico (niños de 6 a 12 años). En este eje, en particular se espera que, con el estudio de conceptos como el de patrón, se establezcan las bases para el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en niveles superiores, en especial el razonamiento algebraico (MINEDUC, 2018). No obstante, se considera que, en el eje Números y operaciones, además, se pueden identificar algunos conceptos que fomenten este tipo de razonamiento. Como consecuencia de lo anterior, en este trabajo se propone caracterizar una tipología de problemas, asociados al eje Números y operaciones en el contexto chileno, que fomenten el razonamiento algebraico.

### **Consideraciones Teóricas Y Metodológicas**

Este trabajo se sustenta en nociones teóricas desarrolladas en el Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007, 2019), específicamente en el modelo de Niveles de Algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). Este modelo es considerado como herramienta teórico-metodológica, la cual permite caracterizar el razonamiento algebraico en términos de las representaciones utilizadas, los procesos de generalización implicados, así como el cálculo analítico que se pone en juego durante la práctica matemática (personal o

institucional) asociada a un tipo de tareas algebraicas. Cabe señalar que este modelo ha sido implementado en otros estudios, y se ha evidenciado que es un buen predictor de los niveles de algebrización (pretendidos o asignados) para las tareas matemáticas en colecciones de libros de texto (e.g., Aké y Godino, 2018; Castro, Martínez-Escobar y Pino-Fan, 2017).

A continuación, se enuncian los niveles asociados a la Educación básica, y que son de particular interés para este trabajo.

- Nivel 0 (*ausencia de razonamiento algebraico*): los objetos matemáticos son expresados mediante lenguaje natural, numérico, icónico, o gestual; de intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, el resultado de dicho valor se obtiene operando sobre objetos particulares.
- Nivel 1 (*nivel incipiente de algebrización*): se identifican propiedades, equivalencias numéricas, y relaciones a partir de tareas estructurales; los lenguajes son de tipo natural, numérico, icónico, o gestual.
- Nivel 2 (*nivel intermedio de algebrización*): intervienen, principalmente, cantidades indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico, o simbólico-literal, para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial-temporal.
- Nivel 3 (*nivel consolidado de algebrización*): se generan objetos intensivos, representados de manera simbólico-literal, y se opera con ellos; se realizan transformaciones de las expresiones algebraicas (simbólicas).

Es pertinente aclarar que el nivel no se establece al problema per se, sino a la práctica (o a las prácticas) desarrollada para dar solución al problema. Se define como práctica matemática a “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

El trabajo es de carácter cualitativo (León y Montero, 2003). La técnica de investigación es el análisis de contenido (Gil Flores, 1994), específicamente de las prácticas matemáticas institucionales (propuestas en textos oficiales). El análisis de desarrolla en las siguientes fases: 1) estudio preliminar y selección de los problemas asociados al eje Números y operaciones, 2) resolución de los problemas seleccionados y análisis pormenorizado de las prácticas matemáticas, y finalmente 3) se generan las categorías de problemas. A saber, se analizan textos de matemática, distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile para los niveles de educación básica. En este trabajo, en particular, se reportan los resultados obtenidos del libro de matemática de primero y segundo básico.

### **Resultados Preliminares**

El análisis desarrollado ha evidenciado que una serie de prácticas matemáticas institucionales propuestas en el contexto del eje Números y operaciones, posibilitarían el desarrollo del razonamiento algebraico. Diversos investigadores consideran a la aritmética como acceso clave al álgebra (Warren, 2003). Carpenter, Frankie y Levi (2003), por ejemplo, manifiestan que, al estudiar álgebra, los estudiantes no entienden que los procedimientos que usan para resolver ecuaciones y simplificar expresiones están basados en las propiedades de los números. Por su parte, Molina (2009), argumenta que “ser capaz de contar requiere trabajar algebraicamente ya que es necesario tener una forma, estructurada y organizada de contar” (p. 137). Por lo tanto, se considera que, a pesar de que existe una brecha entre la aritmética y el álgebra en el contexto educativo básico de Chile, los problemas y sus respectivas prácticas, funcionarían como promotores del razonamiento algebraico en niveles incipientes (0 y 1 específicamente).

Se han identificado 19 tipos de problemas en el libro de texto de primero básico (16 asociados al eje de Números y operaciones, 3 a Patrones y álgebra), mientras que en el libro de texto de segundo

grado se han caracterizado 21 tipos de problemas (18 en Números y operaciones, 3 en Patrones y álgebra). En este estudio no se consideran los problemas pertenecientes al eje Patrones y álgebra, ello debido a que el documento curricular vigente ya establece que éstos desarrollen el pensamiento algebraico (MINEDUC, 2018). Para el caso del eje Números y operaciones, se ha cuantificado toda la tipología de problemas, no obstante, sólo se enfoca la atención en aquellos que fomentan, a través de sus prácticas matemáticas, el razonamiento algebraico. Entre la tipología de problemas, asociada a ambos grados, se encuentran:

- Aplicar el algoritmo de componer y descomponer cantidades numéricas para resolver problemas.
- Comparar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que,  $<$ ,  $>$ ,  $=$ ).
- Identificar la condición para saber cuándo un elemento pertenece a un conjunto.
- Identificar y representar mediante un número la cardinalidad de un conjunto.
- Operar cantidades numéricas (suma o resta).

Las prácticas promovidas por las tipologías de problemas anteriores se asocian al nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico), es decir, los objetos matemáticos se representan, principalmente, en lengua materna, lenguaje numérico o icónico. Las cantidades numéricas (objetos extensivos) se descomponen como la suma de dos (o más) cantidades numéricas. Además, se hace uso de representaciones de tipo tabular para organizar la información, principalmente cuando se usan algoritmos para la suma y resta. Los conceptos-definiciones son: suma, resta, componer, descomponer, ábaco, valor posicional, descomposición aditiva, etc. Los procedimientos se asocian al uso de algoritmos, y, además, se apoyan en el uso de materiales como el ábaco. Las proposiciones y argumentos se asocian principalmente, en cómo los números se pueden descomponer o componer según el valor posicional de sus dígitos.

Por otra parte, el nivel 1 (*nivel incipiente de algebrización*) sólo se ha identificado en las prácticas promovidas en el libro de texto de segundo grado, en el cual la tipología de problemas asociada es la siguiente:

- Identificar las propiedades aditivas de los números naturales (conmutativa, asociativa) (5 problemas),
- Identificar las propiedades de la multiplicación de los números naturales (existencia del neutro multiplicativo, propiedad cero de la multiplicación) (10 problemas).

Entre los objetos algebraicos identificados se encuentra: noción de valor desconocido, propiedades de estructura, noción de equivalencia numérica. Las prácticas en este nivel permiten identificar que intervienen objetos extensivos (ejemplos) que promueven la generalización (una regla) de manera explícita mediante lengua materna. Se identifican propiedades y relaciones a partir de las tareas estructurales.

### **Proyecciones**

Análogamente al análisis desarrollado para los libros de texto de primero y segundo básico, se pretende caracterizar tipologías de problemas asociados al desarrollo del razonamiento algebraico para los textos restantes, de tercero a sexto básico, pero no sólo en el eje de Números y operaciones, sino que además en el de Patrones y álgebra. Se considera que una caracterización de esta naturaleza permitirá identificar los conocimientos didáctico-matemáticos que los profesores de educación básica deberían poseer para desarrollar procesos instruccionales acordes a los planteamientos curriculares.

### **Agradecimientos**

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación FONDECYT nro. 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), Chile.



## Referencias

- Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2), 171-201. <https://doi.org/10.24844/em3002.07>
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2)
- Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the Chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 107-130.
- Castro, W., Martínez-Escobar, J. y Pino-Fan, L. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: Análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 6(2), 164-191. <http://doi.org/10.17583/redimat.2017.1981>
- Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 39-59.
- Gil-Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos. Aplicaciones a la investigación educativa*. Barcelona, España: PPU.
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- León, O. G. y Montero, I. (2003). Metodologías cualitativas. En O. G. León y I. Montero (Eds.), *Métodos de Investigación en Psicología y Educación* (3ra ed.) (pp. 138-177). Madrid, España: McGraw-Hill.
- Lew, H.-C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 88-106.
- Mejías, C. A. (2019). *Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria* (Tesis doctoral). Recuperado desde Repositorio Digital de la Universidad de Girona. (<http://hdl.handle.net/10256/17137>)
- Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Bases curriculares primero a sexto básico*. Santiago de Chile, Autor.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 3(3), 135-156.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, EE.UU.: Autor.
- Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook*. Reston, EE.UU.: National Council of Teachers of Mathematics.