Stop Press Dedication from Carolyn Kieran: *I would like to dedicate the presentation of this paper to my young co-author, Cesar Martínez-Hernández, whose life was heartbreakingly taken away from him by COVID-19 on December 15, 2020. Cesar's role in the herein presented research study was crucial.*

DECOMPOSING, COMPOSING, AND RECOMPOSING NUMBERS IN NUMERICAL EQUALITIES: ALGEBRAIC THINKING BASED ON STRUCTURE SENSE

DESCOMPOSICIÓN, COMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN DE NÚMEROS EN IGUALDADES NUMÉRICAS: PENSAMIENTO ALGEBRAICO BASADO EN UN SENTIDO DE ESTRUCTURA

Cesar Martínez Hernández
Universidad de Colima
cmartinez7@ucol.mx

Carolyn Kieran
Université du Québec à Montréal
kieran.carolyn@uqam.ca

This paper reports the manner in which primary school students from a Mexican public school, having just learned to validate the truth-value of numerical equalities (e.g., 8+2+16=10+12+4) based on two algebraic strategies, that is, transforming both sides of the equality to a third common form, and rewriting one side of the equality in the same form as the other side – both strategies being based on decomposing, composing, and recomposing the numbers – tended to favor the first strategy as their primary approach for validating numerical equalities. This tendency suggests that, although the students have developed an algebraic thinking based on structure sense in arithmetic, the second strategy would appear to be less consolidated than the first.

Keywords: Algebra and algebraic thinking; Structure sense in arithmetic; Decomposing, composing, and recomposing numerical expressions and equalities.

Background

Algebraic thinking in primary-grade students has been studied from different perspectives, although an emphasis on generalization has prevailed. Recently, it has been proposed that, in addition to generalizing, seeking and expressing structure is an important part of this kind of mathematical thinking (Kieran, 2018). Regarding the structural, some studies have focused on observing regularities in numerical equalities (e.g., Pang & Kim, 2018; Schifter, 2018). However, according to Mason, Stephens, and Watson (2009), structural thinking involves more than observing regularities. In this sense, Martínez-Hernández and Kieran (2018, 2019, in press), in their studies on structure sense in arithmetic, have reported on the strategies that primary school students use to validate numerical equalities. They found that these students tended at first to use computational strategies to validate numerical equalities of the form $a+b=c+d$ (Martínez-Hernández & Kieran, 2018); however, they were also able to use *ad hoc* strategies on the same kind of equalities, based on decomposing the given numbers (Martínez-Hernández & Kieran, 2019). According to Martínez-Hernández and Kieran (in press), the students were able to transition from an arithmetical thinking expressed by computational strategies to an algebraic thinking expressed by the decomposition, composition, and recomposition of the given numbers, using two strategies: (i) transforming both sides of a numerical equality to a third common form; and (ii) rewriting one side of a given equality in the form of the other side. Based on the emergence of these two strategies, the following question is posed: Which of these two strategies do the students tend to use in order to validate numerical equalities for which they previously used computational or ad hoc strategies?

Theoretical Framework

Early algebra has been characterized from different perspectives (e.g., Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2018), but all of them recognize the algebraic character of arithmetic. According to Kieran (2004), algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which the letter-symbolic could be used as a tool, or alternatively within activities that could be engaged in without using the letter-symbolic at all, for example, noticing structure. Recently, Kieran (2018) has emphasized and suggested that more attention be paid to the structural.

Structure in Numbers and Numerical Operations

According to Kieran (2018), the learning of high school algebra has included a focus on the structural aspect (e.g., Hoch & Dreyfus, 2004, Linchevski & Livneh, 1999) much more so than has been the case for early algebra. Kieran suggests that structure sense in arithmetic entails more than attending to the basic field properties. Structure sense in arithmetic involves looking through mathematical objects and decomposing and recomposing them in several structural ways. Based on Freudenthal (1983, 1991, cited in Kieran, 2018), Kieran proposes that the structure in numbers and in numerical operations is explained by the fact that the number system constitutes an order structure, in which, for each pair of numbers, a third number, for instance, its sum, can be assigned, thereby constituting an addition structure. Similarly, the multiplicative structure can be defined. Accordingly, expressing structure sense in arithmetic implies being aware of the different structural forms that numbers and numerical operations can take, for example, observing that the number 989 can be rewritten equivalently as 9x109+8 and as 9x110-1, also as $9 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$, among others.

In this way, Kieran (2018) suggests promoting in students, from the early grades, various experiences with equivalence of numerical expressions through the structuring processes of decomposing, composing, and recomposing. And, in line with Freudenthal who describes different means of structuring according to a variety of structures and properties, numbers and numerical operations can be decomposed and recomposed to show equivalence without calculation and involving properties related to, for example, the addition structure and the properties of equality. Thus, validating the truth-value of numerical equalities such as 67+86=68+85 by decomposing, composing, and recomposing the involved numbers implies re-expressing them in different forms, such as 67+86=60+7+1+85 and 68+85=60+7+1+85, and so it is true that 67+86=68+85.

Method

Participants

In the study, three students (S1, S2 and S3) from a Mexican public school participated, ages between 11 and 12 years. When data were collected, the students had just finished primary school. The three participants are the same students that were reported in Martínez-Hernández and Kieran (2018, 2019, in press).

Task Design and Data Collection

The study involved the design of four tasks. The focus in this paper is the fourth task, which asked students to indicate the truth-value of three numerical equalities (10+7=5+12, 530+200=300+430, and 8+2+16=10+12+4), without calculating the total of each side. The structure of the task for each of the equalities is the following:

- A true numerical equality is presented
- Students are asked to show, without calculating the total of both sides, that the equality is true.
- Students are asked for an explanation of their procedure.

The data were collected through a group interview, conducted by the first author of this paper. During the interview, each student was given the printed task sheet, which they first worked on individually for each given equality, followed by a group discussion of their answers. During the full interview, students had the opportunity to use the blackboard to explain their approaches.

Results and Discussion

When students had finished answering with respect to the veracity of the three equalities (10+7=5+12, 530+200=300+430, and 8+2+16=10+12+4) and after developing the two strategies based on decomposing, composing, and recomposing the given numbers [i.e., (i) looking for a third common form, observed when they validated 530+200=300+430 and 8+2+16=10+12+4; and (ii) transforming one side of the equality into the same form of the other side, which was observed when they validated 8+2+16=10+12+4 (see Martínez-Hernández & Kieran, in press)], they were asked to validate the equalities 10+7=5+12 and 530+200=300+430 once again. The reason for this was that the students had not used the above strategies to validate the initial equality 10+7=5+12 – they had first relied upon a computational strategy, which was followed by an *ad hoc* decomposition that had not involved an attempt to have the same numbers on both sides (see Martínez-Hernández & Kieran, 2019).

Episode 1

To investigate which of the two strategies based on structure sense would be used by the students, the Interviewer (I) asked them to show the veracity of the first given equality. See this episode in the following excerpt.

I: Let me go back to the first two equalities [Writes on the board 10+7=5+12]. How can it be re-expressed?
S1 and S3: Me, me, [Both want to go to the blackboard].
I: S1, go ahead, please. How could you tell this is true, without adding?
S1: [Writes on the board 5+5+5+2=5+5+5+2, see Fig. 1, left]. This [pointing to the 5+5 at the left side of the equality] I would take from the 10. This [pointing to 5+2 on the left side] from the 7. This [pointing to the 5 on the right side from the equality] from 5, and this [pointing to 5+5+2] from the 12.

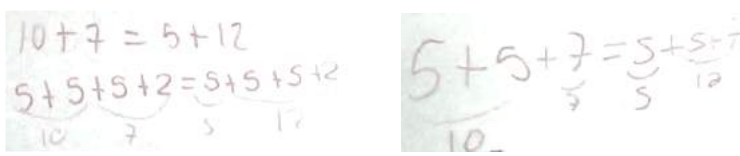


Figure 1: S1's decomposing strategy (left) and S3's (right)

As observed in Fig. 1 (left), S1 decomposes both sides of the equality into a third common form (5+5+5+2), and explains where each number comes from. In the same way, S3 proposes another decomposition (Fig.1, right) based on the same idea – also explaining where each number comes from in the rewritten equality.

Episode 2

In reaction to the students' behavior described in Episode 1, the interviewer asks them directly about the possibility of transforming the left side into the right side (or vice versa). The following excerpt presents the unfolding of the episode.

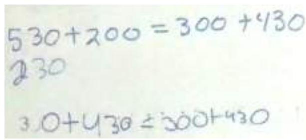
I: Finally, I am going to redo [Writes 530+200=300+430 on the board]. Can it be rewritten? You have already done this, but tell me how to do it in another way. This [Referring to the expression 530+200], for example, can it be rewritten in this way [pointing to the expression 300+430]? Or this [pointing to 300+430] in this way [pointing to 530+200]? How would you do it?
S3: Oh, yes, yes!
I: Go ahead S3
S1: Transforming
I: Tell us S1. Transforming how?

S1: By doing just as S2 and S3 just did [Referring to the strategy to validate 8+2+16=10+12+4; see Martínez-Hernández & Kieran, in press)]

S3: [Goes to the blackboard] I subtract 200 from this one [pointing to 530] to make it into 300, and add the 200 to this one [pointing to 200] to make it 430. Hold on, no! 230 [Finally writes the equality 300+430=300+430, see Fig. 2, left].

I: This [pointing to the left side 300+430 written by S3], where did it come from?

S3: From 530, I subtract 230 and add it to 200, so I get 430.



530+200=300+430
↓
300+(230+200)
↓
300+430=300+430

Figure 2: Rewritten equality by S3 (left); interpretation of his strategy (right)

As observed in the excerpt and in Fig. 2 (left), S3's strategy can be interpreted as follows: The left side is decomposed into 300+230+200 and then recomposed as 300+430; note that he does not have to transform the right side (see Fig. 2, right). The strategy in Episode 2 is based on a simultaneous relation that is discerned between both right and left sides of the given equality, which is not the case for the strategy in Episode 1. In other words, this strategy does not involve an arbitrary decomposing and recomposing of the left side; rather it is guided by the form of the right side.

Conclusions

According to the results, on the one hand, students tend to look for a third common form, by decomposing both sides of an equality (Episode 1) in order to validate the truth-value of numerical equalities. Hence, this strategy replaces the initial computational strategy that was spontaneously used by them at first (see Martínez-Hernández & Kieran, 2018). On the other hand, the Episode 2 strategy emerged from explicit interviewer intervention. As indicated by Martínez-Hernández & Kieran (in press), this second strategy would seem to be cognitively more demanding than the first one. In any case, both strategies go beyond that of simply observing regularities in equalities (e.g., Pang & Kim, 2018; Schifter, 2018) and therefore offer new findings with respect to the development of structure sense in numerical activity. As seen in the example of S3's work (Fig. 2), his way of decomposing, composing, and recomposing the numbers to transform one side of the equality into the form of the other side illustrates not only relational thinking based on structure sense but also the structural approach proposed by Kieran (2018) that involves looking through mathematical objects and expressing them in different structural forms. As a final comment, we envisage expanding the research so as to study the ways in which students understand the similarities and differences of their strategies.

References

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-706). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49–56). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 79-106). New York: Springer.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 173–196.

Martínez-Hernández, C., & Kieran, C. (2018). Strategies used by Mexican students in seeking structure on equivalence tasks. In T. E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163-170). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Martínez-Hernández, C., & Kieran, C. (2019). From computational strategies to a kind of relational thinking based on structure sense. In S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the 41st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 167-176). St. Louis, MO: University of Missouri.

Martínez-Hernández, C., & Kieran, C. (in press). *The development of algebraic thinking in primary school: From computational to structural strategies.* [Paper accepted for presentation at the 14th International Congress on Mathematical Education].

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32.

Pang, J., & Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: A generalized arithmetic perspective. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds*: *The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 141-166). New York: Springer.

Schifter, D. (2018). Early algebra as analysis of structure: A focus on operations. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 309-328). New York: Springer.

DESCOMPOSICIÓN, COMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN DE NÚMEROS EN IGUALDADES NUMÉRICAS: PENSAMIENTO ALGEBRAICO BASADO EN UN SENTIDO DE ESTRUCTURA

DECOMPOSING, COMPOSING, AND RECOMPOSING NUMBERS IN NUMERICAL EQUALITIES: ALGEBRAIC THINKING BASED ON STRUCTURE SENSE

Cesar Martínez Hernández
Universidad de Colima
cmartinez7@ucol.mx

Carolyn Kieran
Université du Québec à Montréal
kieran.carolyn@uqam.ca

Este reporte da cuenta sobre cómo alumnos de primaria de una escuela pública Mexicana, una vez que son capaces de validar la veracidad de igualdades numéricas (e.g., 8+2+16=10+12+4) a partir de dos estrategias: transformar ambos lados de la igualdad en una tercera forma común, o reescribir un lado de la igualdad en la forma del otro lado–ambas relacionadas con la descomposición, composición y recomposición de los números– tienden a utilizar la primera de éstas como su opción inicial de validación de igualdades numéricas. Tal comportamiento de los alumnos indica que si bien muestran un razonamiento de tipo algebraico basado en un sentido de estructura en aritmética, su segunda estrategia no está suficientemente consolidada.

Palabras clave: Álgebra y pensamiento algebraico; Sentido de estructura en aritmética; Descomposición, composición y recomposición de expresiones e igualdades numéricas.

Antecedentes

El pensamiento algebraico en edades tempranas ha sido estudiado desde diferentes perspectivas, aunque ha imperado un énfasis en la generalización. Recientemente, ha sido propuesto que, además de lo general, el sentido de estructura es también parte importante de este tipo de pensamiento matemático (Kieran, 2018). Sobre lo estructural, algunos estudios se han enfocado en la observación de regularidades en igualdades numéricas (e.g., Pang & Kim, 2018; Schifter, 2018). Sin embargo, de acuerdo con Mason, Stephens y Watson (2009), un pensamiento estructural es mucho más que tal característica. En este sentido, Martínez-Hernández y Kieran (2018, 2019, en prensa), sobre el sentido de estructura en aritmética, han reportado estrategias de validación de igualdades numéricas que muestran alumnos de primaria. Los alumnos suelen utilizar estrategias de cómputo para validar igualdades numéricas de la forma $a+b=c+d$ (Martínez-Hernández & Kieran, 2018) y son también capaces de utilizar estrategias *ad hoc* para validar el mismo tipo de igualdades, basados en la descomposición de números (ver Martínez-Hernández & Kieran, 2019). En Martínez-Hernández y Kieran (en prensa) se muestran cómo los estudiantes transitan de un pensamiento aritmético manifestado en estrategias de cómputo hacia un pensamiento de tipo algebraico basado en un sentido de estructura; manifestado en la descomposición, composición y recomposición de los números, a través de dos estrategias: (i), transformar ambos lados de una igualdad numérica en una tercera forma común, y (ii) reescribir un lado de la igualdad en la forma del otro lado. A partir de estas, surge la siguiente pregunta: ¿Cuál de las dos estrategias aplican para volver a validar igualdades en las que previamente utilizaron estrategias de cómputo o bien aplicaron una estrategia *ad hoc*?

Marco Teórico

El algebra temprana ha sido caracterizado desde distintas perspectivas (e.g., Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2018), en todas se reconoce el carácter algebraico de la aritmética. Sobre el pensamiento algebraico en edades tempranas, Kieran (2004) menciona que éste trata sobre el desarrollo de formas de pensamiento en actividades en las cuales el aspecto simbólico-literal puede usarse como herramienta, o alternativamente, en actividades que no requieren lo simbólico-literal, por ejemplo, observar la estructura. Recientemente, Kieran (2018) ha enfatizado y sugerido una mayor atención al aspecto estructural.

La Estructura en los Números y en las Operaciones Numéricas

De acuerdo con Kieran (2018) en el aprendizaje del álgebra, la importancia del aspecto estructural ha sido tomado en cuenta con amplitud (e.g., Hoch & Dreyfus, 2004; Linchevski & Livneh, 1999, Mason, Stephens & Watson, 2009), no así en el caso del álgebra temprana. En este sentido, Kieran propone que el sentido de estructura desde la aritmética implica mucho más que la estructura numérica basada en las propiedades de campo. El sentido de estructura en aritmética involucra observar a través de los objetos matemáticos, descomponerlos y recomponerlos en diferentes formas estructurales. Con base en planteamientos de Freudenthal (1983, 1991, citado en Kieran, 2018), Kieran propone que la estructura en los números y las operaciones se explica en el hecho de que el sistema de los enteros constituye una estructura de orden, en la cual, a cada par de enteros, un tercer número, por ejemplo su suma, les puede ser asignado, constituyendo así una estructura aditiva. De manera similar se define una estructura multiplicativa. Así, manifestar un sentido de estructura en aritmética implica ser consciente de diferentes formas estructurales que los números y las operaciones numéricas pueden tomar, por ejemplo, observar que el número 989 se puede reescribir como 9x109+8, 9x110-1, o bien como $9x10^2+8x10^1+9x10^0$, entre otras.

De esta manera, Kieran (2018) sugiere promover en los alumnos, desde los primeros grados escolares, la experiencia de la equivalencia de expresiones numéricas a través de la descomposición, recomposición y sustitución. En línea con Freudenthal, quien describe diferentes formas de estructurar, acorde a la variedad de estructuras y propiedades, los números y las operaciones numéricas pueden ser descompuestas y recompuestas para mostrar la equivalencia sin realizar cálculos y considerando propiedades relacionadas, por ejemplo, la estructura aditiva y las propiedades de la igualdad. De esta manera, para validar la veracidad de igualdades como 67+86=68+85 mediante la descomposición, composición y recomposición de los números involucrados implica re-expresarla en diferentes formas, por ejemplo: 67+86=67+1+85 y 68+85=60+7+1+85, por lo que 67+86=68+85 es verdadera.

Método

Participantes

Participaron en el estudio tres alumnos (S1, S2 y S3) de sexto grado de primaria de una escuela pública de México, de entre 11 y 12 años de edad; quienes al momento de la toma de datos estaban culminando su educación primaria. Los tres alumnos son los mismos participantes reportados en Martínez-Hernández y Kieran (2018, 2019, en prensa).

Diseño de la Tarea y acopio de datos

El estudio incluyó el diseño de cuatro Tareas. La aquí analizada corresponde cuarta, esta versa sobre mostrar la veracidad de tres igualdades sin calcular el total de cada lado (10+7=5+12, 530+200=300+430 y 8+2+16=10+12+4). La estructura de la Tarea para cada igualdad es:

- Una igualdad numérica es presentada
- Se solicita a los alumnos mostrar, sin calcular el total en ambos lados de la igualdad, que la igualdad es verdadera
- Se les solicita una explicación de su procedimiento

La recopilación de datos se llevó a cabo mediante una entrevista grupal, conducida por el primer autor (E, en adelante) de este reporte. Cada alumno contó con la tarea impresa, en la cual, los alumnos trabajaron primero de manera individual para cada igualdad dada, seguido por una discusión grupal de sus respuestas. En todo momento los alumnos tuvieron la oportunidad de pasar a un pizarrón para explicar sus procedimientos.

Resultados y Discusión

Al terminar los alumnos de responder sobre la veracidad de las tres igualdades (10+7=5+12, 530+200=300+430 y 8+2+16=10+12+4) y después de que desarrollaron dos estrategias basadas en la descomposición, composición y recomposición de los números de las igualdades dadas [i.e., (i) sobre la búsqueda de una tercera forma común, observada cuando validan 530+200=300+430 y 8+2+16=10+12+4, (ii) transformación de un lado de la igualdad en la misma forma del otro lado, observada cuando validan 8+2+16=10+12+4 (ver Martínez-Hernández & Kieran, en prensa)] les fue solicitado validar de nuevo las igualdades 10+7=5+12 y 530+200=300+430. Ello se debe a que no utilizaron tales estrategias para validar la igualdad inicial 10+7=5+12 – en esta, emplearon primero una estrategia de cómputo, y después, una estrategia de descomposición *ad hoc*, en la cual no buscan los mismos números en ambos lados (ver Martínez-Hernández & Kieran, 2019)

Episodio 1

Para indagar cuál de las dos estrategias, basadas en un sentido de estructura, podrían emplear los alumnos, el entrevistador (E) les solicita mostrar de nuevo la veracidad de la primera igualdad propuesta en la tarea, tal como se muestra en la siguiente transcripción.

E: Déjenme regresar a las primeras dos igualdades [Escribe en el pizarrón la igualdad 10+7=5+12]. ¿Cómo se puede re-expresar?

S1 y S3: Yo, yo, [A la vez manifiestan su interés por pasar al pizarrón].

E: S1, pasa por favor. ¿Cómo le harías para decir que sí es verdadera, sin hacer la suma?

S1: [Escribe en el pizarrón 5+5+5+2=5+5+5+2, ver Fig. 1, izquierda]. Éste [señala el 5+5 del lado izquierdo] lo agarraría del 10. Éste [señala el 5+2 del lado izquierdo] del 7. Éste [señala el 5 del lado derecho de la igualdad] del 5, y éste [señala 5+5+2] del 12.

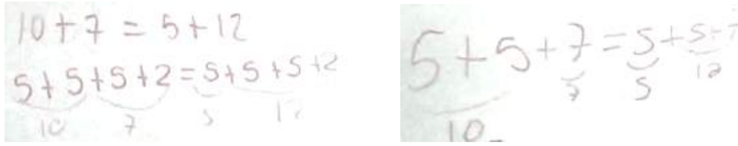


Figura 1: Estrategia de descomposición por S1 (izquierda) y S3 (derecha)

Como se observa en la Fig. 1 (izquierda), S1 descompone ambos lados de la igualdad en una tercera forma común (5+5+5+2), y explica de dónde surgen cada uno de los números de ésta. De la misma forma, S3 propone otra descomposición (Fig. 1, derecha), bajo la misma idea explica dónde surgen los números de la igualdad reescrita.

Episodio 2

Dado el comportamiento de los alumnos descrito en el episodio 1, el entrevistador les cuestiona directamente por la posibilidad de transformar el lado izquierdo en el derecho (o viceversa), esto se observa en la siguiente transcripción.

E: Finalmente, voy a escribirla [Escribe en el pizarrón la igualdad 530+200=300+430]. ¿Esa se puede reescribir? Ya lo hicieron ustedes, pero díganme otra forma más. ¿Esto [Refiriéndose a la expresión 530+200], por ejemplo, se puede reescribir de esta manera [señala la expresión 300+43] o esto [señala 300+430] de esta manera [señala 530+200]? ¿Cómo lo harían?
S3: ¡Ah, ya, ya! [Expresión coloquial de afirmación]
E: Pasa S3
S1: Transformando
E: Dinos S1, ¿transformando, cómo?
S1: Sería lo mismo que hizo S2 y S3, hace rato [Refiriéndose a la estrategia para validar la igualdad 8+2+16=10+12+4, ver Martínez-Hernández & Kieran, en prensa)]
S3: [Pasa al pizarrón] Le quito 200 a éste [señala el 530] para hacerlo 300 y se lo paso a este [señala el 200] para hacerlo para hacerlo 430. ¡Ah no! 230 [Finalmente escribe la igualdad 300+430=300+430, ver Figura 2 izquierda]
E: ¿Esto [señala es lado izquierdo 300+430 escrito por S3] de dónde salió?
S3: Del 530 le quito 230 y se los doy al 200, para que me resulte 430.

Figura 2: Igualdad reescrita por S3 (izquierda) interpretación de su estrategia (derecha)

Como se puede observar en la transcripción y en la Fig. 2 (izquierda), la estrategia desarrollada por S3 se puede interpretar de la siguiente manera: el lado izquierdo 530+200 lo descompone como 300+230+200 y después lo recompone como 300+430, mientras que el lado derecho no lo transforma (ver Fig. 2, derecha). La estrategia del Episodio 2, a diferencia de la del episodio 1, está sustentada en una relación simultánea entre los lados izquierdo y derecho de la igualdad dada. Es decir, no se trata de una descomposición y recomposición arbitraria del lado izquierdo, sino que está guiada por la forma del lado derecho.

Conclusiones

De acuerdo con los resultados, por un lado, los alumnos tienden a buscar una tercera forma común mediante la descomposición de ambos lados de una igualdad (Episodio 1) para validar el tipo de igualdades numéricas propuestas. Así, tal estrategia desplaza a la estrategia de cómputo inicialmente utilizada por ellos de forma espontánea (ver Martínez-Hernández & Kieran, 2018). Por otro, la estrategia del Episodio 2 emerge, de nuevo, a partir de la intervención explícita del entrevistador. Como se indica en Martínez-Hernández y Kieran (en prensa) esta segunda estrategia parece ser cognitivamente más demandante que la primera. En cualquier caso, ambas estrategias van más allá de observar regularidades en igualdades (e.g., Pang & Kim, 2018; Schifter, 2018), lo cual es muestran de nuevos resultados sobre el sentido de estructura en aritmética. Así, el trabajo de S3 (Fig. 2), la forma en que descompone, compone y recompone los números, para transformar un lado de la igualdad en la misma forma del otro, es un ejemplo de un pensamiento relacional basado en un sentido de estructura y de la aproximación estructural propuesta por Kieran (2018) respecto a observar a través de los objetos matemáticos y expresarlos en diferentes formas estructurales. Por ultimo, planteamos la necesidad de investigar sobre la forma en que los alumnos entienden las similitudes y diferencias de sus estrategias.

Referencias

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-706). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49–56). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 79-106). New York: Springer.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 173–196.

Martínez-Hernández, C. & Kieran, C. (2018). Strategies used by Mexican students in seeking structure on equivalence tasks. En T. E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163-170). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Martínez-Hernández, C. & Kieran, C. (2019). From computational strategies to a kind of relational thinking based on structure sense. En S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the 41st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 167-176). St. Louis, MO: University of Missouri.

Martínez-Hernández, C. & Kieran, C. (en prensa). *The development of algebraic thinking in primary school: From computational to structural strategies.* [Paper aceptado para ser presentado en el 14th International Congress on Mathematical Education]

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32.

Pang, J. & Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: A generalized arithmetic perspective. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds*: *The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 141-166). New York: Springer.

Schifter, D. (2018). Early algebra as analysis of structure: A focus on operations. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 309-328). New York: Springer.