INTUITION IN LINEAR TRANSFORMATION: SOME DIFFICULTIES

LA INTUICIÓN EN LA TRANSFORMACIÓN LINEAL: ALGUNAS DIFICULTADES

Osiel Ramírez-Sandoval
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
osiel.ramirez@uacj.mx

An individual interview was conducted with five students who successfully completed a mathematics degree in Mexico. An instrument was applied that contained situations of both linear and non-linear transformations in the graphic and algebraic environment. The results were analyzed under the theoretical framework of Fischbein (1987) on intuition and intuitive models. It was obtained that the interviewed students have a universe of linear transformations that are known in the school context as a prototype. Students exclude the existence of a linear transformation in the geometric environment, when they fail to build said transformation under the composition of the range of prototype models.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking, Algebra and Algebraic Thinking, Cognition, Representations and Visualization

Objective

The purpose of the research was to identify the intuitive models that some Bachelor of Mathematics students retain regarding Linear Transformations in R^2 (in the sense of Fischbein, 1987); It also sought to demonstrate the conceptions that students have regarding this concept. It was hypothesized that the universe that some students have regarding Linear Transformations in R^2 is reduced to rigid movements of the plane.

Theoretical framework

In the present work we are going to consider the term intuition as an instinctual knowledge, not as a method, not as a source of knowledge, but as a type of cognition. To make this approach clearer, Fischbein mentions the following examples:

> One intuitively admits that the shortest path between two points is the straight line, that each number has a successor, that the whole is greater than each of its parts, that a body must fall if it is not supported. (Fischbein, 1987)

These statements are accepted almost immediately, without the need to perform any formal test, that is; We can say that self-evidence is part of a characteristic of intuitive knowledge, but it is remarkable that there is a whole universe of statements or propositions that are not accepted so immediately, for example: if the product of the slopes of two lines is equal to one, then; these are perpendicular, or that $a^0 = 1, a \neq 0$ or the mathematical expression $\frac{n(n+1)}{2}$ generates the sum of the first n natural numbers.

> Intuition is not the primary source of truth, certainty and knowledge but this seems to be so, because this is exactly its role: to create the appearance of certainty, to attribute to various interpretations and representations a character of intrinsic certainty and unquestionable (Fischbein, 1987).

Students develop their intuition, because they resort to representations of mathematical objects. "Mental objects (concepts, operations and statements) must achieve a kind of intrinsic consistency and direct evidence, similar to the real one, external to material objects and events, if the reasoning process is a genuinely productive activity" (Fischbein, 1987) . In this way, mental representations are not the product of memorization; but to the repeated experiences that the subject has had in the concept construction process: obstacles, conflicts, etc.

General characteristics of intuitive cognitions

Fischbein (1987) considers that at every level of mathematical reasoning, one must consider mainly three basic aspects.

1. *The formal aspect*: Which is essentially given by the structure logical-deductive mathematics, such as axioms, definitions, theorems and proofs.
2. *The algorithmic aspect*: Which refers to the procedures, the development of a approach until reaching the solution.
3. *The intuitive aspect*: That refers to the degree of acceptance of the concepts, mathematical propositions or statements, as something evident or true.

The research is particularly interested in the implicit models that students can develop in relation to the concept of linear transformation and the consequences of these models in learning the same concept.

Methodological elements

Five students (Saulo, Miguel, Max, David and Hugo) who graduated from the Bachelor of Mathematics at the Higher School of Physics and Mathematics of the National Polytechnic Institute in Mexico were interviewed. The interview was conducted individually on different dates over the course of a week. At the time of the interviews, each of the students belonged to a master's program in different institutions and specialties, with a common core in mathematics. It should be noted that the students were chosen for their good training and good performance in mathematics, since in this research we intend to identify those intuitive models that persist, and that are not necessarily strictly related to cognitive difficulties, etc.

The bibliography to which they referred when they were questioned about the textbook brought in during their training corresponds to the book on Linear Algebra published by the authors Hoffman & Kunze (1987), however they have consulted other authors such as Grossman (2012), Lang (1974) and Lay (2007).

The method

Once the instrument to be used was established, an a priori analysis was carried out, which hypothetically posed the possible arguments and situations to be presented during the interview. Once this analysis was carried out, we proceeded to the interview stage. The interviewer had the task of bringing, posing and explaining the situations that arose during the development of the interview, and one of his main tasks consisted of confronting the environments where the student had opposing or other people's arguments, which suggested a deeper analysis. Finally, the a priori analysis is contrasted with the a posteriori analysis, to obtain the following results.

Results

In one of the initial activities of the instrument, it requested the following:

a) Provide an example of a linear transformation.
b) Argue why the transformation you proposed is linear.

Both the student Saulo and the student Max provide examples very similar to those approached in a Linear Algebra course (see Figure 1 and Figure 2), since they are characteristic of those presented in textbooks.

$$\text{Sea } T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;/\; T(x,y) = (2x, 2y)$$

Figure 1. Saulo's production, following the example of TL.

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x,y) = (x+y,\, x-y)$$

Figure 2. Max production, to the example of TL.

Fischbein (1987) considers this type of intuitive cognitions to be algorithmic in appearance; which refers to the procedures, the development of an approach until reaching the solution. The strategy used by the students (Saulo and Max) corresponds to first setting the definition of Linear Transformation and then applying it to their proposed examples until their demonstration is completed, with great skill in algebraic treatment. Attached to a priori analysis, this type of results are those expected by teachers, since they correspond to some exercises in textbooks or the first examples that are addressed to illustrate the concept of Linear Transformation. (Grossman, 2012, p.500).

Miguel provides the example of the Linear Identity Transformation (see Figure 3.), and applying his definition verifies the linearity of the transformation. It does not specify vector spaces, nor does it specify the membership of scalars to a field, as in the definition of Linear Transformation that you provided; highlights the notation used by the student presenting the definition with a “f ” referring to the function, thus also taking x & y as vectors, as a real analysis notation.

$$f(x) = x$$
$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Figure 3. Miguel's production, following the example of TL.

In the a priori analysis, this possible response by the student was warned, when conceptualizing Linear Transformations as functions in the context of their calculus courses.

For his part, the student David, argues that:

> David: There are several examples, we can start, to define the simplest transformation, which is the constant, in general the simplest functions are the constants, the ones that map all the space in a number here (indicating the counter-domain) but in this case , to be linear, it cannot be any constant. Given the structure we gave for the linear transformation, it can easily be verified that if the linear transformation is constant, then:

$$T(v) = 0 \quad \forall\, v \in V$$

Figure 4. David's production, following the example of TL.

David demonstrates his mathematical maturity by fluently providing the example of the Zero Linear Transformation. Very similar to the one shown in the textbook that he carried in his studies; "The zero transformation, defined by $0_{\alpha} = 0$, is a linear transformation from V to V" (Hoftman & Kunze, 1971, p.67).

It is evident that in his mathematical reasoning, David shows the formal aspect, in the sense of Fischbein (1987), which is essentially given by the logical-deductive structure of mathematics, such as axioms, definitions, theorems and demonstrations, this situation is reflected throughout the entire interview. David is very much akin to the implicit (or tacit) model:

A fundamental characteristic of a mental model is its structural entity. A model, like a theory, is not a simple isolated rule, rather a global, unitary, meaningful interpretation of a phenomenon or a concept. . . . of an implicit model is its concrete, practical nature, even if the model is an abstract construction. (Fischbein, 1987)

Of the students interviewed; the one that Fischbein (1987) classifies as an intuitive model was also observed when the following activity was requested.

a) Provide an example of a nonlinear transformation
b) Argue why the transformation you proposed is not linear.

The student Hugo does not provide any algebraic expression, as the rest of the interviewed students do; He takes Galileo's transformations, to illustrate the non-linearity of transformation

> Hugo: . . . well, here I'm going to use something like this. . . Galileo transformations, for example, are linear transformations, when. . . in fact they are valid for: when a reference system moves with respect to the other and in each of the two it is realized. . . for example the position of a particle or of a body in general, then this. . . and the Galileo transformations are linear transformations, but that only applies when the speed with which a system S 'moves with respect to another system S is constant (write), right now I don't remember what they are. . . how are the Galileo transformations established, but. . . if to this system S ', which moves with respect to the system S, we make this speed be different, not constant, that is, it has a acceleration, the resulting transformation is going to be a non-linear transformation, it is going to carry a term due to the acceleration, it is going to carry a square there. For that reason, it would be non-linear and that would also be the argument. . . Besides, if we check the calculations for this a bit, we would surely obtain a non-linear expression. . . and therefore it would not fulfill the two properties that a linear transformation must satisfy.

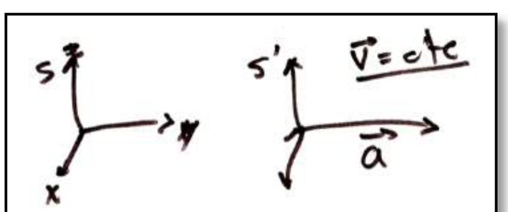

Figure 5. Hugo production, to the example of Nonlinear Transformation.

> An intuitive model is not necessarily a direct reflection of a certain reality, very often it is based on an abstract interpretation of that reality. The graph of a function is an intuitive model of that function and the function, for its part, is the abstract model of a true phenomenon […] Intuitive models that use conventional, graphical means are generally called diagrams. (Fischbein, 1987)

Conclusions

We observed that all the students showed a complete management of the concept of linear transformation, reaffirming their good training and performance in the area of mathematics, proof of this was that they all provided definitions of the concept of linear transformation presented in textbooks or that were acquired in their linear algebra courses, they also showed examples and counterexamples of linear transformations; It should be noted that all of these were different.

We verify that the students immediately identify a prototype linear transformation (expansions, contractions, rotations, reflections and the combination of them) in both environments. However, in the geometric part where the figures show a fixed vector, the students cannot identify the linear transformation, differing from the corresponding situation in the algebraic stage, which led to a confrontation of their arguments.

References

Fischbein, E. (1987*). Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holland: Reidel.
Gómez Chacón, I. M. (2000). La intuición en Matemáticas. *EDUCAR*, 3(7), 30-34.
Hoffman, K., Kunze, R., & Finsterbusch, H. E. (1971). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana.
Grossman Stanley I. 2012. *Algebra Lineal*. McGraw-Hill/INTERAMERICANA EDITORES, S.A DE C.V. México. 7ª. Ed.
Lang S. 1974. *Álgebra Lineal.* México: Fondo Educativo Interamericano.
Lay, D. C. (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones.* Pearson educación.
Ramírez-Sandoval, O. (2008). *Modelos intuitivos que tienen algunos estudiantes de matemáticas sobre el concepto de Transformación Lineal* (Tesis de Maestría). Cinvestav- IPN, México.
Ramírez-Sandoval, O. Romero-Félix, C. F. & Oktaç, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de transformaciones lineales en el plano. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 19, 225-250.

LA INTUICIÓN EN LA TRANSFORMACIÓN LINEAL: ALGUNAS DIFICULTADES

INTUITION IN LINEAR TRANSFORMATION: SOME DIFFICULTIES

Osiel Ramírez-Sandoval
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
osiel.ramirez@uacj.mx

Se realizó una entrevista individual a cinco estudiantes que cubrieron satisfactoriamente una licenciatura en matemáticas en México. En ella; se aplicó un instrumento que contenía situaciones de transformaciones tanto lineales, como no lineales en el ambiente gráfico y algebraico. Los resultados se analizaron bajo el marco teórico de Fischbein (1987) sobre la intuición y los modelos intuitivos. Se obtuvo que los estudiantes entrevistados, disponen de un universo de transformaciones lineales que son conocidas en el contexto escolar como prototipo. Los estudiantes excluyen la existencia de una transformación lineal en el ambiente geométrico, cuando no logran construir dicha transformación bajo la composición de la gama de modelos prototipos.

Objetivo

La investigación tuvo como propósito el identificar los modelos intuitivos que conservan algunos estudiantes Licenciatura en Matemáticas en cuanto a las Transformaciones Lineales en R^2 (en el sentido de Fischbein, 1987); asimismo se busco evidenciar las concepciones que poseen los estudiantes respecto a éste concepto. Se tuvo como hipótesis, que el universo que poseen algunos estudiantes respecto a las Transformaciones Lineales en R^2 se reduce a movimientos rígidos del plano.

Marco Teórico

En el presente trabajo el término intuición vamos a considerarlo como un conocimiento instintivo, no como un método, no como una fuente de conocimientos, sino como un tipo de cognición. Para hacer más claro este acercamiento, Fischbein menciona los siguientes ejemplos:

> Uno admite intuitivamente que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta, que cada número tiene un sucesor, que el todo es más grande que cada una de sus partes, que un cuerpo debe caerse si no esta sostenido. (Fischbein, 1987)

Estas afirmaciones son aceptadas de forma casi inmediata, sin tener la necesidad de realizar alguna prueba formal, es decir; podemos decir que la autoevidencia forma parte de una característica del conocimiento intuitivo, pero es notable que existe todo un universo de afirmaciones o proposiciones que no son aceptadas de forma tan inmediata, por ejemplo: si el producto de las pendientes de dos rectas es igual a uno, entonces; estas son perpendiculares, ó que $a^0 = 1, a \neq 0$ ó la expresión matemática $\frac{n(n+1)}{2}$ genera la suma de los n primeros números naturales.

Una habilidad que desarrollan los estudiantes en una disciplina como las matemáticas corresponde a la intuición, la cual adquieren debido a la interacción ineludible al: conocer, comprender, construir y/o emplear objetos que no se puede acceder de manera directa, por su naturaleza abstracta. Una formación en matemáticas, no se reduce a un sistema deductivo de conocimientos, "la actividad creativa en matemáticas es un proceso constructivo en el cual los procedimientos inductivos, las analogías y las conjeturas plausibles, juegan un papel fundamental" (Gómez-Chacón, 2000, p.30). La intuición, es un término que no tiene un sentido universal en la comunidad de la matemática educativa; para ello recurrimos a la descripción propuesta por nuestro marco teórico.

> La intuición no es la fuente primaria de la verdad, certeza y conocimiento pero esto parece ser así, porque este es exactamente su papel: crear la apariencia de certeza, atribuir a diversas interpretaciones y representaciones un carácter de certeza intrínseca e incuestionable (Fischbein, 1987).

Los estudiantes desarrollan su intuición, porque recurren a representaciones de los objetos matemáticos. "Los objetos mentales (conceptos, operaciones y declaraciones) deben conseguir una especie de consistencia intrínseca y evidencia directa, similar a la real, externa a objetos materiales y eventos, si el proceso de razonamiento es una actividad genuinamente productiva" (Fischbein, 1987). De esta manera, las representaciones mentales no son el producto de la memorización; sino a las reiteradas experiencias que ha tenido el sujeto en el proceso de construcción del conceptos: obstáculos, conflictos, etc.

Características generales de cogniciones intuitivas

Fischbein (1987) considera que en todo nivel de razonamiento matemático, se deben de considerar principalmente tres aspectos básicos.

1. *El aspecto formal*: Que viene a estar dado esencialmente por la estructura lógico-deductiva de la matemática, como son los axiomas, las definiciones, teoremas y demostraciones.
2. *El aspecto algorítmico*: Que se refiere a los procedimientos, al desarrollo de un planteamiento hasta llegar a la solución.
3. *El aspecto intuitivo*: Que se refiere al grado de aceptación de los conceptos, proposiciones o afirmaciones matemáticas, como algo evidente o cierto.

La investigación se interesa particularmente los modelos implícitos que los estudiantes pueden desarrollar en relación con el concepto transformación lineal y las consecuencias de estos modelos en el aprendizaje del mismo concepto.

Elementos metodológicos

Se entrevistó a cinco estudiantes (Saulo, Miguel, Max, David y Hugo) egresados de la Licenciatura en Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional en México. La entrevista se realizó de manera individual en diferentes fechas en el transcurso de una semana. Al periodo de las entrevistas, cada uno de los estudiantes pertenecía a un programa de maestría en diferentes instituciones y especialidades, con un tronco común en matemáticas. Cabe aclarar que los estudiantes fueron elegidos por su buena formación y buen desempeño en matemáticas, ya que en esta investigación pretendemos identificar aquellos modelos intuitivos que persisten, y que no necesariamente guardan estricta relación con dificultades cognitivas, etc.,

La bibliografía a la que hicieron referencia cuando se les cuestionó sobre el libro de texto llevado en el transcurso de su formación, corresponde al libro de Álgebra Lineal publicada por los autores Hoffman & Kunze (1987), sin embargo han consultado a otros autores como Grossman (2012), Lang (1974) y Lay (2007).

El Método

Una vez establecido el instrumento a emplear, se realizó un análisis a priori, donde se planteaba de manera hipotética, los posibles argumentos y situaciones a presentarse durante la entrevista. Una vez realizado este análisis, se procedió a la etapa de entrevistas. El entrevistador tuvo la labor de llevar, plantear y explicar las situaciones que se presentaban durante el desarrollo de la entrevista, y uno de sus principales tareas consistió en confrontar los ambientes donde el estudiante tenía argumentos opuestos o ajenos, que sugerían un análisis más profundo. Finalmente se contrastan, el análisis a priori con el análisis a posteriori, para obtener los siguientes resultados.

Resultados

En una de las actividades iniciales del instrumento solicitaba lo siguiente:

a) Proporciona un ejemplo de una transformación lineal.
b) Argumenta por qué es lineal la transformación que propusiste.

Tanto el estudiante Saulo, como el estudiante Max proporcionan ejemplos muy similares a los abordados en un curso de Álgebra Lineal (ver Figura 1 y Figura 2), dado que son característicos a los presentados en los libros de texto.

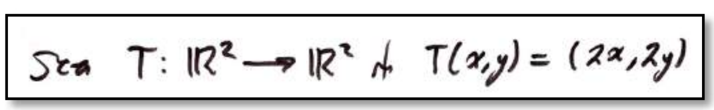

Figura 1. Producción de Saulo, al ejemplo de TL.

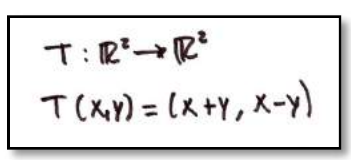

Figura 2. Producción de Max, al ejemplo de TL.

A este tipo de cogniciones intuitivas, Fischbein (1987) las considera como de aspecto algorítmico; las cuales se refiere a los procedimientos, al desarrollo de un planteamiento hasta llegar a la solución.

La estrategia que emplean los estudiantes (Saulo y Max), corresponde a situar en un primer momento a la definición de Transformación Lineal y posteriormente aplicar a sus ejemplos propuestos hasta cumplir su demostración, con gran habilidad en el tratamiento algebraico. Apegados al análisis a priori, este tipo de resultados son los esperados por los profesores, dado que corresponden a algunos ejercicios en los libros de textos o los primeros ejemplos que se abordan para ilustrar el concepto de Transformación Lineal. (Grossman, 2012, p.500).

Miguel roporciona el ejemplo de la Transformación Lineal Identidad (ver Figura 3.), y aplicando su definición verifica la linealidad de la transformación. No especifica los espacios vectoriales, como tampoco la pertenencia de los escalares a un campo, al igual que en la definición de Transformación Lineal que proporcionó; resalta la notación que maneja el estudiante presentando la definición con una "f "aludiendo a la función, así también tomando a x & y como vectores, como una notación de análisis real.

$$f(x) = x$$
$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Figura 3. Producción de Miguel, al ejemplo de TL.

En el análisis a priori se advirtió de esta posible respuesta por parte del estudiante, al conceptualizar a las Transformaciones Lineales como funciones en el contexto de sus cursos de cálculo.

Por su parte el estudiante David, argumenta que:

> David: hay varios ejemplos, podemos empezar, para definir la transformación más sencilla, que sea la constante, en general las funciones más sencillas son las constantes las que mapean todo el espacio en un número de acá (indicando el contradominio) pero en este caso, para que sea lineal, no puede ser cualquier constante. Dada la estructura que dimos para la transformación lineal, se puede verificar fácilmente, que si la transformación lineal es constante, entonces:

$$T(v) = 0 \quad \forall\, v \in V$$

Figura 4. Producción de David, al ejemplo de TL.

David evidencía su madurez matemática al proporcionar con soltura el ejemplo de la Transformación Lineal Cero. Muy semejante al que se muestra en el libro de texto que llevó en sus estudios; "la transformación cero 0, definida por $0_\alpha = 0$, es una transformación lineal de V en V" (Hoftman & Kunze, 1971, p.67).

Es evidente que en su razonamiento matemático, David evidencia el aspecto formal, en el sentido de Fischbein (1987), el cual viene a estar dado esencialmente por la estructura lógico-deductiva de la matemática, como son los axiomas, las definiciones, teoremas y demostraciones, esta situación se ve reflejada a lo largo de toda la entrevista. David está muy afín al modelo implícito (o tácito):

> Una característica fundamental de un modelo mental es su entidad estructural. Un modelo, como una teoría, no es una regla aislada simple, más bien una interpretación global, unitaria,

significativa de un fenómeno o un concepto. . . . de un modelo implícito es su naturaleza concreta, práctica, aun si el modelo es una construcción abstracta. (Fischbein,1987)

De los estudiantes entrevistados; también se observó aquel que Fischbein (1987) clasifica, como modelo intuitivo, cuando se solicitó la siguiente actividad.

a) Proporciona un ejemplo de una transformación no lineal
b) Argumenta por qué no es lineal la transformación que propusiste.

El estudiante Hugo, no proporciona expresión algebraica alguna, como lo hace el resto de los estudiantes entrevistados; él toma a las transformaciones de Galileo, para ilustrar la no linealidad de transformación.

Hugo: . . . bueno, aquí voy a usar algo que este . . . las transformaciones de Galileo, por ejemplo son transformaciones lineales, cuando . . . de hecho valen para: cuando un sistema de referencia se mueve respecto del otro y en cada uno de los dos se realiza . . . por ejemplo la posición de una partícula o de un cuerpo en general, entonces este . . . y las transformaciones de Galileo son transformaciones lineales, pero eso sólo vale cuando la velocidad con la que se mueve un sistema S' respecto de otro sistema S, es constante (escribe v = cte), ahorita de momento no recuerdo cuáles son las . . . cómo están establecidas las transformaciones de Galileo, pero . . . si a este sistema S', que se mueve con respecto al sistema S, hacemos que esta velocidad sea diferente, no sea constante, es decir, tenga una aceleración, la transformación resultante va a ser una transformación no lineal, va a llevar un término debido a la aceleración, va a llevar un cuadrado ahí. Por esa razón, sería no lineal y además ese sería el argumento . . . a parte que si nos metemos a comprobar un poco los cálculos de esto, seguramente obtendríamos una expresión no lineal . . . y por lo tanto no cumpliría con las dos propiedades que debe satisfacer una transformación lineal.

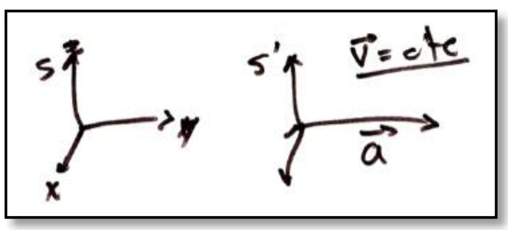

Figura 5. Producción de Hugo, al ejemplo de Transformación No Lineal.

Un modelo intuitivo no es necesariamente una reflexión directa de una cierta realidad, muy a menudo está basado en una interpretación abstracta de aquella realidad. El gráfico de una función es un modelo intuitivo de aquella función y la función, por su parte, es el modelo abstracto de un verdadero fenómeno[…] Los modelos intuitivos que usan medios convencionales, gráficos son generalmente llamados diagramas. (Fischbein, 1987)

Conclusiones

Observamos que todos los estudiantes mostraron un manejo íntegro del concepto de transformación lineal, reafirmando su buena formación y desempeño en el área de las matemáticas, prueba de ello fue que todos proporcionaron definiciones del concepto de transformación lineal que presentan los libros de texto o que fueron adquiridas en sus cursos de álgebra lineal, así también mostraron ejemplos y contraejemplos de transformaciones lineales; cabe señalar que todos estos fueron diferentes.

Comprobamos que los estudiantes identifican inmediatamente una transformación lineal prototipo (expansiones, contracciones, rotaciones, reflexiones y la combinación de ellas) en ambos ambientes.

Sin embargo, en la parte geométrica donde las figuras muestran un vector fijo los estudiantes no logran identificar la transformación lineal, difiriendo de la situación correspondiente de la etapa algebraica, lo cual desembocó en una confrontación de sus argumentos.

Referencias Bibliográficas

Fischbein, E. (1987*). Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holland: Reidel.

Gómez Chacón, I. M. (2000). La intuición en Matemáticas. *EDUCAR*, 3(7), 30-34.

Hoffman, K., Kunze, R., & Finsterbusch, H. E. (1971). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana.

Grossman Stanley I. 2012. *Algebra Lineal*. McGraw-Hill/INTERAMERICANA EDITORES, S.A DE C.V. México. 7ª. Ed.

Lang S. 1974. *Álgebra Lineal.* México: Fondo Educativo Interamericano.

Lay, D. C. (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones.* Pearson educación.

Ramírez-Sandoval, O. (2008). *Modelos intuitivos que tienen algunos estudiantes de matemáticas sobre el concepto de Transformación Lineal* (Tesis de Maestría). Cinvestav- IPN, México.

.Ramírez-Sandoval, O. Romero-Félix, C. F. & Oktaç, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de transformaciones lineales en el plano. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 19, 225-250.