

A STUDY OF CONTRADICTIONS AS A LEVER FOR CONTINUING EDUCATION: A CASE INVOLVING ALGEBRAIC GENERALIZATION ACTIVITIES

ÉTUDE DE CONTRADICTIONS COMME LEVIER DE FORMATION CONTINUE: UN EXEMPLE AUTOUR D'ACTIVITÉS DE GÉNÉRALISATION ALGÈBRIQUE

Mélanie Tremblay

Université du Québec à Rimouski
melanie_tremblay@uqar.ca

Mireille Saboya

Université du Québec à Montréal
saboya.mireille@uqam.ca

Transforming the teaching practice involves the adoption of new methods that must engage teachers in reflecting on their practice (CSE, 2004; Day, 1999). The roles of the researcher are multiplying. His quest to understand the teaching/learning activity is mirrored by a concern to examine the teaching profession from more than just a normative standpoint, thereby contributing to the reflection on actions and participating in the decisions that will guide their interventions (Bednarz, 2009). Influenced by historical and cultural theories (Radford, 2011; Engestrom, 1999) and more specifically by the concept of contradiction, our communication illustrates our way of “grasping” the awareness process and the coming into being of generality layers linked to the development of algebraic thinking occurring in the various classrooms of the teachers we are supporting and acting as trainers with them.

Keywords: Algebra and algebraic thinking, Teacher knowledge, Mathematical knowledge for teaching, Teaching activities and practices.

Background of the action research

Training mechanisms targeting the prescriptive training of teaching approaches are not obtaining the expected benefits (Bednarz & Proulx, 2010; Tardif, Lessard & Gauthier, 1998). Rather, the transformation of the teaching practice involves the appropriation and integration of new methods that must engage teaching professionals in reflecting on their practice (CSE, 2014; Day, 1999). The role of the researcher is thus changing. His quest to understand the teaching activity is mirrored by a concern to examine the teaching profession from more than just a normative standpoint, thereby contributing to the reflection on actions and participating in the decisions that will guide the interventions of the professionals (Bednarz, 2009).

From 2013 to 2017, we conducted an action research involving more than twenty high school teachers and academic advisors. The main objective: reflect together and improve the teaching practices aiming at the development of algebraic thinking among junior high school students (students aged 12 to 15). This research is the continuation of other studies (Kaput, 1998; Squalli, Mary & Marchand, 2011) suggesting to rethink classroom interventions fostering algebraic learning even before introducing literal language. To do this, different approaches (e.g. generalization to identify formulas and introduction to analytical reasoning through problem solving) promoting the introduction of algebra were considered and tested over the four years.

Reflecting on the development of algebraic thinking

Throughout this co-development work between the participants and the research team, the expression of a mathematical activity that we reformulated in terms of acting was the first step in inviting the participants to reconceptualize algebraic thinking as sensitive thinking as defined by Radford (2011). It is thereby considered a social process in the coming into being of historical and cultural methods and is mediated through gestures, the body, signs and artefacts provided to the student. These semiotic means are constituent parts of the thinking process. More specifically, the

three conditions linked to the development of algebraic thinking that we address like Radford (2014) were discussed regularly in such a way as to recognize their expression among students and to influence teaching to foster their emergence. These conditions are: 1) *Reason about the indeterminacy*, or the ability to exploit problems involving not-known numbers such as unknowns, variables or parameters; 2) *Denotation*, which refers back to the use of signs (alphanumeric or non-conventional signs, gestures, natural language or a mix of those) to name, symbolize what is considered to be not-known; 3) *Reason analytically*, or treating indeterminate number(s) as though they were known and operate on them. The background of this project constantly brought us back to this desire to foster, among students, both the use of the letter without it being imposed by teachers and the development of algebraic expressions whose meaning could be made clear to their peers.

Following the presentation of the various roles that we, as researchers, played as part of the action research, this communication illustrates how the study and coming into being, among teachers, of certain contradictions inherent to the teaching of algebraic generalization help to enrich discussions with teachers on the way in which to introduce algebraic generalization.

Diversification of the roles of the researchers according to their objectives

Just like teachers and academic advisors, research assistants and researchers are here conceptualized as subjectivities expressing themselves in a common project whose goal is to develop algebraic thinking. The objectives of the researchers influence the intentionality of their activity and are:

- Support our participants and collectively reflect on the development of algebraic thinking among students
- Document algebra teaching/learning through the study of certain moments experienced in our participants' classrooms
- Document the support activity

These objectives thereby influence the different roles played as researchers. This text fosters the distinction of these roles although they were more often than not expressed in an overlapping way.

Table 1: Roles and tasks of the researchers

Roles	Tasks
Trainer	<ul style="list-style-type: none"> · Develop training activities · Host the training sessions · Share examples experienced in class by one of us while we were high school teachers · Plan and prepare the training days (methods, tools, etc.) · Anticipate / identify the learning obstacles and intervene if necessary · Manage the group in such a way as to facilitate professional learning · Evaluate the progress or achievement of the training objectives · Identify the needs and priorities
Classroom session investigator	<ul style="list-style-type: none"> · Observe and study the algebra teaching/learning activities as they take place in the classrooms · Produce and communicate research results that shed light on certain aspects of the activities studied
Educational resource investigator	<ul style="list-style-type: none"> · Study the educational kits provided to teachers and academic advisors

Investigator on the co-development activity between the participants and research team	<ul style="list-style-type: none"> · Observe and study the co-development activity between the participants, professional and research assistants as they evolve mainly on the discussion and training days and targeting the development of algebraic thinking among junior high school students · Produce and communicate research results that shed light on certain aspects of the activity studied
Support worker	<ul style="list-style-type: none"> · Develop and maintain collaboration relationships with the teachers, academic advisors, professional and research assistants · Offer (or make sure to offer when the research professional is involved) educational support to the teachers and academic advisors between the training days · Help find solutions to the problems perceived

Adaptation from Lessard (2008) and Gagnon (2010)

The activity theory as a tool for the researcher investigating the co-development activity between the participants and research team

As such, to report on the method we used to support and study the teaching/learning activity targeting the introduction of algebra in our teachers' classrooms and its transformation under the influence of the project, it seems useful to recall that the principles of the perspective used inevitably steer the production of data, its interpretation and more specifically, our way of conceptualizing the actions of the researcher in her different functions. The assumptions of the social, historical and cultural theories feed this text: the ways in which people do things, think and are are considered social practices that are mutually constitutive part of the culture in which they live and that must account for past similar activity forms (historical and genetic perspective). Phenomena must be studied holistically rather than isolating certain elements that would not account for the links they have between themselves (Langemeyer & Roth, 2006). As such, the activity is considered to be the smallest analysis unit allowing for researchers to give meaning to the participant coming into being process through the actions taken by the participants. To better grasp the activity concept, one must understand its dialectic (ideal, material) nature. According to Leontiev, a subject's (teacher, academic advisor or researcher) activity is always geared toward an object/a motive. The goal of this activity is reflected in the actions. In the special case of learning, Roth and Radford note that:

“[...] students cannot know the object/motive of the learning activity: the object/motive itself has to be the outcome of the learning activities so that others – e.g. teachers – have to take on the regulative function that in other productive human activities exists in the known object/motive” (Roth & Radford, 2011, p.16).

As written by Radford (2015), student activity is the materialization of cultural archetypes seen in “actions, words, perceptions, gestures, symbols, reasoning (p.338)”. Our role as trainers also calls us to insert methods linked to the historical and cultural development of algebraic thinking in the support activity of our participants and make the aspects of teaching/learning to consider when looking at it from an educational perspective come into being. As such, if for Roth and Radford (2011) the challenge of the learning activity for students is precisely that they recognize the object/motive through their own actions, we will see that the same goes for researchers who commit to contributing to the training of teachers and academic advisors.

Roth and Radford (2011) invite us to consider thought from an anthropological (its origins) and ontogenical (the conditions of its existence) perspective. On the one hand, thought is conceptualized as *praxis cogitans*. Thought is not static; it is activity and movement. Considered a potential, it reveals itself, is reflected in a singular and becomes/is a purpose/activity of consciousness. Radford (2011) then speaks of thought/activity as an awareness-building processes he called

objectification. On the other hand, this awareness-building process depends on one's social existence. Researchers add that these individual and collective awareness-building processes are mutually constitutive.

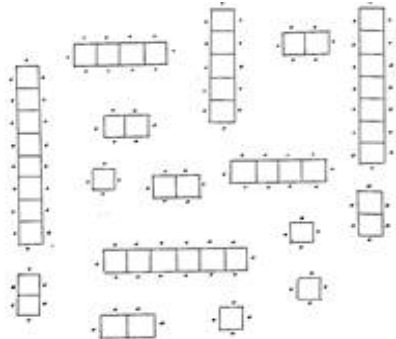
The concept of contradiction

Historical and cultural theories invite us to conceptualize activity as movement. Object/motive motivates an individual's activity; the object of the activity is materialized/reflected in his actions. This flow is considered to be the effect of the activity itself. Taking the work of linguists as an example, Roth (2012) illustrates the meaning to give to any activity. Our language changes in its uses. As written by Bakhtin (1981), a language dies as soon as it is no longer used. Every time a word is used, its meaning reifies itself, changes, much like the language itself is transformed by the use of a word. Thus, words, signs, in a dialectical approach, are not a single unique entity (Roth, 2014). In their uses, they carry and exhibit an internal contradiction that becomes apparent in the various ways in which people use signs. According to Roth and Radford (2011), these internal contradictions refer back to conflictual aspects that coexist dialectically in a phenomenon. Other work uses the concept of contradiction, but it is instead conceptualized differently. This is the case for the work of Engeström (2001) and Potari et al. (2018). The latter studies and distinguishes the activity of different communities (e.g. Department, teachers) considered as distinct systems. They then identify the contradictions in the contrary practices, the different choices between teachers or between a teacher and an external source (a researcher, manual or program). It is then said that the study of contradictions stemming from two systems can create learning opportunities and thereby transform the actions and goals of an activity. The transformation activity must then be looked at from a collective standpoint, all the while taking into account the different mediating factors (subject, tool, rules, community, division of work...) that influence this same activity.

Some elements of methodology

As part of this action research, the collaborative sessions with the teachers and academic advisors were all filmed. During these sessions, the project participants familiarized themselves with certain tasks, had analyzed videos of teachers facilitating these tasks and had attended the presentation of some theoretical content by the researchers, namely Radford's (2003) typology of generalization, which we will not refer to here. Also, the experiments conducted in the teachers' classrooms were also filmed. Transcriptions of these recordings were made. As part of this communication, we will discuss the experiments that followed the training session during which *Marcel's restaurant* situation was presented to the teachers (see Figure 1).

Marcel, a restaurant owner, has single tables in his restaurant. He places these tables one beside the other to be able to seat his clients when they arrive. He has tables of different sizes: large, small, medium...



Marcel would very much like not having to count the clients coming in every time to decide at which table to seat them. Can you help him find a way to quickly calculate the number of clients that can be seated at a table, regardless of the size of the table? Our owner lives far so he will be waiting for you to write to him about this.

Write him a **message with words** that would indicate a way to quickly find out how many people he can seat at a table, for any table.

Messages are long to read for Marcel so rewrite your message but this time as a text message so that he can read it quickly.

Figure 1. Marcel's restaurant situation

Before being able to discuss the potential and inherent intentions of the situation, the teachers had to solve it. So, for the first question, different word messages are possible. There are lots of good messages such as: 1) There are 2 people per table facing each other and one person at each end of the table; 2) 3 people can be seated at the end tables and 2 people facing each other for each table between these two tables; 3) We place one person per table and another person on one end of the table and we do this twice (we notice a symmetry), incorrect messages are also possible. These messages are formulated in context; here the motives presented are an essential support to the problem-solving process. In the second question, the purpose is to bring students to move on to symbolization, which helps to illustrate a size (here the number of tables) concisely and briefly.

Reflection on the contradictions recognized in the teachers' experiments

Through this situation, the goals of the researchers are to give meaning to symbolism through the emergence of symbolization that will be specific and spontaneous to each student. By not imposing the use of a sign (letter or other) in particular, we can expect a variety of symbolizations to represent the same variable. Other than this work on symbolization, the purpose is also to motivate the use of various algebraic expressions that will be equivalent and that will bring some flexibility in the way in which to perceive the pattern. This method opens the door to a work on equivalent expressions.

After the training session, numerous teachers experimented with this situation in their classroom to set out what they had observed in their students during the next meeting. Upon their return, the trainers observed diversity in the teachers' ways of doing things (see Table 1).

Table 2. The teachers' different ways of doing things for *Marcel's restaurant*

Stéphane	Annie	Alexandre
<p>Stéphane considers this situation to be the first he uses to introduce algebra in his classroom. He referred back to it several times over the next few weeks. Especially, when he discussed the recognition of proportionality situations (words, value table and graph). During the first period, in teams of two, his students must find two different formulas expressed with algebraic symbols. The teacher validates the formulas obtained and invites a few teams to come explain them in front of the class by coordinating their explanations of the table visual. During the next class, the teacher focuses on the representation of the formulas taken from two representation</p>	<p>Annie mentions having dealt with the chapter on “geometric and numerical patterns” before. The students thus learned to extract formulas by studying the additive recurrence in the progression of different patterns. The teacher introduced the situation proposed with the intention of having the different messages she wishes to obtain in words or as a symbolic form extracted. During the problem solving, she also invites her students to build a value table to extract a formula. She is disappointed by the lack of variety of formulas.</p>	<p>This situation is the first that the teacher uses to introduce algebra according to him; however, he says that he started working on the translation of comparison relations only during games at the end of some periods. For this situation, the teacher promotes the emergence of different messages that are based on a study of the pattern. When returning to whole class, the focus is put on validating each message expressed in words by relying on the visual of the situation. He is therefore concerned with coordinating the visual with words. Following the first period, use of symbolism is decreased. Alexandre focuses on the potential of the formulas expressed in words to predict the maximum number of</p>

registers: value table and graph. The teacher's purpose is to express the links existing between these three registers: table, graphic and symbolic.		people that can be seated according to the number of tables.
--	--	--

It can be noted that although the teachers all orchestrated *Marcel's restaurant* situation, the generalization activity or, more specifically, the coming into being process experienced by the students differs in each of the classrooms depending on what the teachers value in terms of the development of algebraic thinking. As trainers, we gave ourselves the role of documenting the teaching/learning activity lived in each of the participating teachers' classrooms. Here we can document the various facets of the same object (see Table 1). That said, the role of trainer is much more than that; it is about facilitating a group discussion on the different intentions driving the teachers when the experiment was set up and on the activities lived. While acknowledging the potential of these different methods, it is about going back to the initial intentions targeted (motive of the activity) by the trainers and set out during the previous meeting. It is also about making the teachers see the various facets (meaning of the letter, emergence of algebraic expressions whose meaning differs depending on the students' objectification process, generalization levels recognized...) of algebraic thinking that develops in each classroom.

In Alexandre's class, the trainers recognize the importance to giving meaning to algebraic expressions. They strive to make the teachers see all the work completed by the teacher to help his/her students coordinate the verbalization of the generalization messages extracted from the visual provided. They then make this contradiction (idealized/materialized in the classroom activity) be seen, which can be better explained by associating the generalization levels of Radford (2003). The whole class discussion in Alexandre's classroom is thus mainly in terms of contextual generalization. The latter still includes references to the specificities of the context objects and their characteristics in terms of the spatial and temporal situation. The generalization messages remain contextual in that their designation mode still depends on spatial properties. As specified by Radford (2003), the "arguments" or "variables" are no longer numbers, but generic objects that are designated by generic terms such as "the figure" or "the next figure". Other contradictions are felt by the trainers during the presentation of the approaches of Stéphane and Annie but they are somewhat different. Indeed, adding a value table in the situation (Annie's approach) limits the expressions extracted by the students, which the teacher observed. There are two levels of tension. On the one hand, it is no longer about working on the different possible symbolizations and a variety of expressions that mean something to the students; here, looking for a rule seems to be a priority. On the other hand, the generalization work undertaken by the students seems to be glossed over by the application of a procedure (for each table added, there are two more people so we write "times two" in the formula). This contradiction was a driving change for the teacher who became aware of it herself when she compared the activity in her classroom with that of her peers.

As for Stéphane's approach, the trainers did not intervene in the same way given that the intentions targeted are met. The focus is put on the work involving the representation registers; it is then about making aware the teachers that converting an expression in another register and coordinating the various significations is a daunting task for the students who are beginning to learn about algebraic generalization. It is not about telling the teachers that what they are doing is wrong or that there is a contradiction, in the sense of Engestrom (2001), according to "our trainer system", but rather about helping them look at the different facets that mesh together when it comes to reflecting on the work of algebraic generalization.

Conclusion

The study of the teaching/learning activities in the different classrooms of the teachers we are supporting illustrates the teachers' different methods that, although stemming from the same situation, have different motives. In our investigator role, we study the materialization of the expression of algebraic thinking in each class as contradictions between what the teachers aim and the materialized activity. In our role as trainers, it is by relying on these different ways of doing that, we make apparent different facets of algebraic thinking but which nevertheless shape it differently.

Studying certain contradictions that we are looking to make visible in our role as trainers allows the teachers to learn how to recognize the emergence of the different facets that influence the expression of algebraic thinking.

Acknowledgements

The data and results presented in the text come from an action research whose title is "Co-construction, trial, analysis and sharing of educational situations aiming to foster arithmetic/algebraic transition". This project was funded as part of the program supporting the continuing education of school personnel (Chantier 7), of the Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2013-2017).

References

- Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogical imagination*. Austin: University of Texas Press.
- Bednarz, N. (2009). Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques : Une nouvelle entrée sur la conception d'activités en mathématiques à l'intersection de pratique en classe et recherche. In Quaderni di Ricerna in Didattica Matematica (supp. No.2), 3-18. *Actes du 61^e colloque de la CIEAEM*.
- Bednarz, N., & Proulx, J. (2010). Développement professionnel des enseignants en mathématiques. Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques. *Éducation et Formation*, 293, 21-36.
- Conseil supérieur de l'éducation (2014). *Le développement professionnel, un enrichissement pour toute la profession enseignante - sommaire*. Retrieved from <http://www.cse.gouv.qc.ca/FR/Publications/index.html>.
- Day, C. (1999). *Developing Teachers: The Challenges of Lifelong Learning*. London: Falmer Press.
- Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.
- Gagnon, B. (2010). Le conseiller pédagogique, un partenaire pour vivre les changements en éducation au Québec. *Vie Pédagogique*, 153. Retrieved from <http://collections.banq.qc.ca/ark:/52327/bs1988437>
- Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. *Proceedings of a National Symposium*, may 27 and 28, 1997. *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum* (p. 25-26). Washington, D.C.: National Academy Press.
- Langemeyer, I., & Roth, W.-M. (2006). Is cultural-historical activity theory threatened to fall short of its own principles and possibilities as a dialectical social science? *Outlines. Critical Social Studies*, 8(2), 20-42.
- Lessard, C. (2008). Entre savoirs d'expérience des enseignants, autorité ministérielle et recherche : les conseillers pédagogiques. In P. Perrenoud, M. Altet, C. Lessard et L. Paquay (dir.). *Conflits de savoirs en formation des enseignants (pp. 169-181)*. Bruxelles, Belgique : De Boeck.
- Potari, D., Psycharis, G., Sakonidis, H. & Zachariades, T. (2018). Collaborative design of a reform-oriented mathematics curriculum: contradictions and boundaries across teaching, research, and policy. *Educational Studies in Mathematics*, volume 102, p. 417-434.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 1 - 27.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.
- Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Roth, W.-M. (2014). Science language Wanted Alive: Trough the dialectical/dialogical lens of Vygotsky and the Bakhtin circle. *Journal of Research in Science Teaching*, 51, 1049-1083.

- Squalli, H., Mary, C., & Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. In J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.). *Recherches et expertises pour l'enseignement. Technologie, sciences, mathématiques* (p. 67-78). Bruxelles: DeBoeke Université.
- Tardif, M., Lessard, C., & Gauthier, C. (1998). Formation des maîtres et contextes sociaux. Perspectives internationales. *Revue des sciences de l'éducation*, 24 (3), 682–683.

ÉTUDE DE CONTRADICTIONS COMME LEVIER DE FORMATION CONTINUE: UN EXEMPLE AUTOUR D'ACTIVITÉS DE GÉNÉRALISATION ALGÈBRIQUE

A STUDY OF CONTRADICTIONS AS A LEVER FOR CONTINUING EDUCATION: A CASE INVOLVING ALGEBRAIC GENERALIZATION ACTIVITIES

Mélanie Tremblay

Université du Québec à Rimouski
melanie_tremblay@uqar.ca

Mireille Saboya

Université du Québec à Montréal
saboya.mireille@uqam.ca

La transformation de la pratique enseignante implique un travail d'appropriation de nouvelles manières de faire qui doit engager les enseignants dans un travail réflexif sur leur pratique (CSE, 2004; Day, 1999). Les rôles du chercheur se multiplient. Sa recherche de compréhension de l'activité d'enseignement/apprentissage se voit doublée d'un souci de dépasser le regard normatif sur ce que font les enseignants pour ainsi contribuer à la réflexion sur les actions et prendre part aux décisions qui guideront leurs interventions (Bednarz, 2009). Sous l'influence de théories historico-culturelles (Radford, 2011; Engestrom, 1999) et plus particulièrement du concept de contradiction, notre communication illustre notre manière de «saisir» le processus de prise de conscience et de mise en apparence de couches de généralité associées au développement de la pensée algébrique qui a cours dans les différentes classes des enseignants que nous accompagnons et d'agir en tant que formatrices auprès d'eux.

Mots-clés: Algebra and algebraic thinking, Teacher Knowledge, Mathematical Knowledge for Teaching, Instructional activities and practices.

Mise en contexte de la recherche-action

Les dispositifs de formation qui visent une formation prescriptive d'approches de l'enseignement ne connaissent pas les bénéfices escomptés (Bednarz & Proulx, 2010; Tardif, Lessard & Gauthier, 1998). La transformation de la pratique enseignante implique plutôt un travail d'appropriation et d'intégration de nouvelles manières de faire qui doivent engager les professionnels de l'enseignement dans un travail réflexif sur leur pratique (CSE, 2014; Day, 1999). Le rôle du chercheur est alors en mutation. Sa recherche de compréhension de l'activité enseignante se voit doublée d'un souci de dépasser le regard normatif sur ce que font les enseignants pour ainsi contribuer à la réflexion sur les actions et prendre part aux décisions qui guideront les interventions des professionnels (Bednarz, 2009).

De 2013 à 2017, nous avons mené une recherche-action impliquant plus d'une vingtaine d'enseignants et des conseillers pédagogiques du secondaire. L'objectif premier : réfléchir ensemble et améliorer les pratiques d'enseignement visant le développement de la pensée algébrique chez les élèves du premier cycle du secondaire (élèves de 12 à 15 ans). Cette recherche est le prolongement d'autres études (Kaput, 1998; Squalli, Mary & Marchand, 2011) suggérant de repenser les interventions en classe qui favorisent l'apprentissage de l'algèbre avant même l'introduction au langage littéral. Pour ce faire, différentes approches (p.ex. généralisation en vue de dégager des

formules et introduction au raisonnement analytique par la résolution de problèmes) favorisant l'introduction de l'algèbre ont été abordées et expérimentées au courant des quatre années.

Réfléchir le développement de la pensée algébrique

Au fil de ce travail de coélaboration entre les participants et l'équipe de recherche, l'expression d'une activité mathématique que nous avons reformulée en termes d'agir fut le prélude invitant les participants à reconceptualiser la pensée algébrique en tant que pensée sensible telle qu'elle est définie par Radford (2011). Elle est ainsi considérée en tant que processus social de mise en apparence de manières de faire historico-culturelles et est médiatisé par les gestes, le corps, les signes et les artefacts que l'on met à la disponibilité de l'élève. Ces moyens sémiotiques sont des parties constitutives de la pensée. Plus spécifiquement, les trois conditions associées au développement de la pensée algébrique que nous reprenons de Radford (2014) furent régulièrement discutées de manière à reconnaître leur expression chez les élèves et à teinter l'enseignement de manière à favoriser leur émergence. Ces conditions sont : 1) *Raisonnement sur l'indéterminé*, soit cette capacité à exploiter des problèmes qui implique des nombres qui ne sont pas connus; 2) *Dénoter* qui renvoie à l'usage de signes (signes alphanumériques ou non conventionnels, gestes, langage naturel ou mélange de ce qui précède) pour nommer, symboliser ce qui est considéré comme étant inconnu ; 3) *Raisonnement analytiquement*, soit traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues et opérer sur celles-ci. La trame de fond de ce projet nous renvoyait constamment à ce désir de favoriser chez les élèves, d'une part, le recours à la lettre sans qu'elle ne soit imposée d'emblée par les enseignants et, d'autre part, à l'élaboration d'expressions algébriques dont la signification saurait être explicitée à leurs pairs.

Suite à la présentation de la variété des rôles que les chercheuses que nous sommes avons joués dans le cadre de la recherche-action, la présente communication illustre comment l'étude et la mise en apparence auprès des enseignants de certaines contradictions inhérentes à l'apprentissage de la généralisation algébrique contribuent à enrichir les discussions avec les enseignants sur des manières d'introduire la généralisation algébrique.

Diversification des rôles des chercheuses selon leurs objectifs

Au même titre que les enseignants et les conseillers pédagogiques, les assistants de recherche et les chercheuses sont ici conceptualisés en tant que subjectivités qui s'expriment dans un projet commun dont l'objet est le développement de la pensée algébrique. Les objectifs des chercheuses colorent l'intentionnalité de leur activité et sont :

- Accompagner nos participants et réfléchir collectivement au développement de la pensée algébrique chez les élèves
- Documenter l'activité d'enseignement/apprentissage de l'algèbre par l'étude de certains moments vécus dans les classes de nos participants
- Documenter l'activité d'accompagnement

Ces objectifs teintent ainsi les différents rôles assumés en tant que chercheuses dont ce texte favorise leur distinction bien qu'ils s'exprimaient plus souvent qu'autrement en superposition.

Tableau 1: Rôles et tâches des chercheuses

Rôles	Tâches
Formateur	<ul style="list-style-type: none"> · Concevoir des activités de formation · Animer les formations · Partager des exemples vécus en classe par l'une de nous alors que nous étions enseignante au secondaire · Planifier et préparer les journées de formations (méthodes, outils, etc.) · Anticiper / identifier les obstacles à l'apprentissage et intervenir si nécessaire · Assurer une gestion de groupe facilitant un apprentissage professionnel · Évaluer la progression ou l'atteinte des objectifs de formation · Identifier les besoins et les priorités
Investigateur des séances de classe	<ul style="list-style-type: none"> · Observer et étudier les activités d'enseignement/apprentissage de l'algèbre telles qu'elles se déroulent dans les classes · Produire et communiquer des résultats de recherche qui éclairent certaines composantes des activités étudiées
Investigateur des ressources didactiques	<ul style="list-style-type: none"> · Étudier les ensembles didactiques mis à la disposition des enseignants et des conseillers pédagogiques
Investigateur de l'activité de coélaboration entre participants et équipe recherche	<ul style="list-style-type: none"> · Observer et étudier l'activité de coélaboration entre les participants, la professionnelle et les assistantes de recherche telle qu'elle évolue principalement dans les journées d'échange et de formation et visant le développement de la pensée algébrique chez les élèves du 1^{er} cycle. · Produire et communiquer des résultats de recherche qui éclairent certaines composantes de l'activité étudiée.
Accompagnateur	<ul style="list-style-type: none"> · Développer et maintenir des relations de collaboration avec les enseignants, les conseillers pédagogiques, la professionnelle et les assistantes de recherche · Offrir (ou s'assurer d'offrir lorsque la professionnelle de recherche est mise à contribution) un soutien pédagogique aux enseignants et conseillers pédagogiques entre les journées de formation · Contribuer à la recherche de solutions aux problèmes perçus

Adaptation de Lessard (2008) et Gagnon (2010)

La théorie de l'activité un outil pour le chercheur investigateur de l'activité de coélaboration entre participants et équipe de recherche

Ainsi, pour rendre compte de notre manière d'accompagner et d'étudier l'activité d'enseignement/apprentissage visant l'introduction de l'algèbre dans les classes de nos enseignants et sa transformation sous l'influence du projet, il s'avère utile de rappeler que les principes de la perspective retenue orientent inéluctablement la production de données, leur interprétation et plus spécifiquement notre manière de conceptualiser l'agir du chercheur dans ses différentes fonctions. Les postulats des théories socio-historico-culturelles alimentent ce texte: les manières de faire, de penser, d'être des individus sont considérées comme des pratiques sociales qui sont consubstantielles de la culture dans laquelle ils vivent et qui doivent rendre compte de formes d'activités semblables passées (perspective historico-génétique). Les phénomènes doivent être étudiés de façon holistique plutôt que d'en isoler certains éléments qui ne rendraient plus compte des liens qu'ils entretiennent entre eux (Langemeyer & Roth, 2006). L'activité est ainsi considérée comme la plus petite unité d'analyse permettant aux chercheurs de donner du sens au processus de mise en apparence des participants à travers leurs actions posées. Pour mieux saisir le concept d'activité, il est nécessaire de

comprendre sa nature dialectique (idéale, matérielle). Au sens de Leontiev, l'activité d'un sujet (enseignant, conseiller pédagogique ou chercheur) est toujours dirigée vers un objet/motif. L'objet de cette activité se matérialise dans les actions. Dans le cas particulier de l'apprentissage, Roth et Radford notent que :

«[...] les élèves ne peuvent pas connaître l'objet/motif de l'activité d'apprentissage : cet objet doit être le résultat de l'activité d'apprentissage dans laquelle les autres – p.ex. les enseignants – assurent une fonction de régulation permettant l'expression d'autres activités humaines dans l'objet de l'activité d'apprentissage [traduction libre]» (Roth & Radford, 2011, p.16).

Comme l'a écrit Radford (2015), l'activité des élèves est la matérialisation d'archétypes culturels qui se donnent à voir dans « l'agir, le parlé, le perçu, le gesticulé, le symbolisé, le raisonné (p.338) ». Notre rôle de formatrices convoque aussi une responsabilité d'insérer dans l'activité d'accompagnement de nos participants des manières de faire associées au développement historico-culturel de la pensée algébrique et de rendre apparentes des facettes de l'enseignement/apprentissage à considérer lorsqu'on porte un regard didactique sur celle-ci. Ainsi, si pour Roth et Radford (2011) le défi de l'activité d'apprentissage pour les élèves est précisément qu'ils reconnaissent l'objet/motif à travers leurs propres actions, on verra qu'il en va de même pour les chercheurs qui se donnent le mandat de contribuer à la formation d'enseignants et de conseillers pédagogiques.

Roth et Radford (2011) nous invitent à considérer la pensée sous ses dimensions anthropologique (ses origines) et ontogénique (ses conditions d'existence). D'une part, la pensée est conceptualisée comme *praxis cogitans*. La pensée n'est pas fixe, elle est activité, elle est mouvement. Considérée comme potentialité, elle se dévoile, se matérialise dans un singulier et devient/est objet/activité de conscience. Radford (2011) parle alors de pensée/activité en termes de processus de prise de conscience qu'il a appelé objectivation. D'autre part, ce processus de prise de conscience n'est possible qu'à condition d'exister socialement. Les chercheurs ajoutent que ces processus de prise de conscience individuel et collectif sont mutuellement constitutifs.

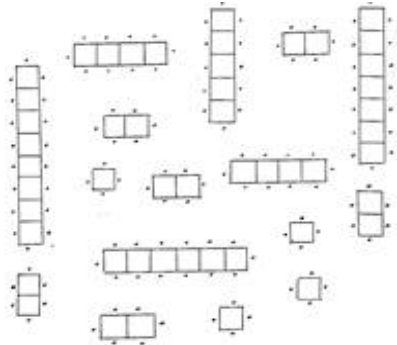
Le concept de contradiction

Les théories historico-culturelles nous invitent à conceptualiser l'activité en tant que mouvement. Le motif motive l'activité d'un individu, l'objet de l'activité se matérialise dans ses actions. Ce flux est considéré comme l'effet de l'activité elle-même. Prenant l'exemple des travaux de linguistes, Roth (2012) illustre le sens à donner à toute activité. Notre langue change dans ses usages. Comme l'écrit Bakhtin (1981) un langage meurt dès qu'il n'est plus utilisé. À chaque fois qu'un mot est utilisé, son sens se réifie, change tout comme la langue est elle-même transformée par l'usage d'un mot. Ainsi, les mots, les signes, sous une approche dialectique, ne sont pas une seule et unique entité (Roth, 2014). Ils portent et arborent, dans leurs usages, une contradiction interne qui se manifeste elle-même dans les différentes manières dont usent les individus des signes. Ces contradictions internes renvoient, selon Roth et Radford (2011) à des aspects conflictuels qui coexistent dialectiquement dans un phénomène. D'autres travaux recourent au concept de contradiction, mais il est plutôt conceptualisé différemment. C'est le cas des travaux d'Engeström (2001) et de Potari et al. (2018). Ces derniers étudient et distinguent l'activité de différentes communautés (p.ex. Ministère, enseignants) considérées comme des systèmes distincts. Ils identifient alors des contradictions dans les pratiques contraires, les choix différents entre enseignants ou entre un enseignant et une source externe (un chercheur, un manuel ou un programme). On avance alors que l'étude de contradictions émergeant entre deux systèmes peut créer des opportunités d'apprentissage et ainsi transformer les actions et buts d'une activité. Il s'agit alors de s'intéresser à l'activité de transformation d'un point de vue collectif tout en tenant compte de différents éléments médiateurs (sujet, outil, règles, communauté, division du travail...) qui influencent cette même activité.

Quelques éléments de méthodologie

Dans le cadre de la présente recherche-action, les séances de collaboration avec les enseignants et conseillers pédagogiques ont toutes été filmées. Dans le cadre de ces séances, les participants au projet s'étaient familiarisés avec certaines tâches, avaient analysé des vidéos d'enseignants qui animaient ces tâches et avaient assisté à la présentation de quelques contenus théoriques exposés par les chercheuses, notamment la typologie de la généralisation de Radford (2003) que nous n'exposerons pas ici. De même, les expérimentations qui ont eu lieu dans les classes des enseignants furent aussi filmées. Des transcriptions de ces enregistrements ont été effectuées. Dans le cadre de cette communication, nous discuterons des expérimentations qui ont succédé la séance de formation où la situation *Le Restaurant de Marcel* a été présentée aux enseignants (voir figure 1).

Marcel, le propriétaire du restaurant, dispose de tables simples dans son restaurant qu'il place l'une à côté de l'autre pour pouvoir placer ses clients lorsqu'ils arrivent. Il dispose ainsi de différentes tables de toutes sortes de grandeurs : des grandes, des petites, des moyennes...



Marcel aimerait bien ne pas avoir à compter à chaque fois les clients qui arrivent pour décider autour de quelle table il les place. Pourrais-tu l'aider à trouver une manière de calculer vite le nombre de clients qu'on peut asseoir autour d'une table, et ce, quelle que soit la grandeur de la table? Notre propriétaire habite loin alors il attend que tu lui écrives à ce sujet.

Écris-lui un **message en mots** qui lui indiquerait une manière de faire pour trouver vite combien de personnes il peut asseoir autour d'une table, et ce, pour n'importe quelle table.

Les messages sont longs à lire pour Marcel, réécris tes messages cette fois-ci sous forme de texto pour qu'il puisse les lire rapidement.

Figure 1. La situation du restaurant de Marcel

Avant de pouvoir discuter du potentiel et des intentions inhérentes à la situation, les enseignants ont eu à la résoudre. Ainsi, pour la première question, différents messages en mots sont possibles. On peut penser à de bons messages comme : 1) Il y a 2 personnes par table face à face et une personne à chaque extrémité de la table; 2) On peut asseoir 3 personnes sur les tables des extrémités et deux personnes face à face pour chacune des tables qui se situe entre ces deux tables; 3) On place une personne par table et une autre personne à une des extrémités de la table et on fait ceci deux fois (on voit une symétrie), des messages erronés sont également possibles. La formulation de ces messages se fait en contexte, les motifs présentés sont ici un support essentiel à la résolution. Dans la deuxième question, l'intention est d'amener les élèves à passer à la symbolisation, celle-ci permettant d'illustrer de façon concise et succincte une grandeur, ici le nombre de tables.

Réflexion sur des contradictions reconnues dans les expérimentations des enseignants

À travers cette situation, les intentions des chercheuses sont de donner du sens au symbolisme en misant sur l'émergence d'une symbolisation qui sera propre et spontanée à chaque élève. En n'imposant pas l'usage d'un signe (lettre ou autre) en particulier, on peut s'attendre à une variété de symbolisations pour représenter la même grandeur. Outre ce travail autour de la symbolisation, l'intention est également de motiver le recours à différentes expressions algébriques qui seront équivalentes apportant une flexibilité dans la façon de voir des motifs. Cette façon de faire ouvre la porte sur un travail sur les expressions équivalentes.

Après la séance de formation, plusieurs enseignants sont allés expérimenter cette situation en classe en vue d'explicitier ce qu'ils avaient observé chez leurs élèves lors de la prochaine rencontre. Lors du

retour, les formatrices ont observé une diversité dans les manières de faire des enseignants (voir tableau 1).

Tableau 2. Différentes manières de faire d'enseignants pour le *Restaurant de Marcel*

Stéphane	Annie	Alexandre
<p>Cette situation est considérée par Stéphane comme étant la première qu'il utilise en classe pour introduire l'algèbre. Il reviendra sur celle-ci à plusieurs reprises durant quelques semaines. Il la réinvestit lorsque vient le temps d'aborder la reconnaissance de situations de proportionnalité (mots, table de valeurs et graphique). Lors de la première période, en équipes de deux, ses élèves doivent trouver deux formules différentes qui sont exprimées à l'aide de symboles algébriques. L'enseignant valide les formules obtenues et invite quelques équipes à venir les expliquer à l'avant en coordonnant leur explication du visuel des tables. Au cours suivant, l'enseignant axe sur la représentation des formules dégagées dans deux registres de représentation : table de valeurs et graphique. L'intention de l'enseignant est d'exprimer les liens existants entre ces trois registres : table, graphique et symbolique.</p>	<p>Annie mentionne avoir traité le chapitre «des suites» auparavant. Les élèves ont donc appris à dégager des formules en étudiant la récurrence additive dans la progression de différents motifs. L'enseignante introduit la situation proposée en ayant comme intention de faire dégager différents messages qu'elle souhaite obtenir en mots ou sur forme symbolique. Lors de la résolution, elle invite aussi ses élèves à construire une table de valeurs pour dégager une formule. Avec déception, elle partage ne pas avoir eu une diversité de formules.</p>	<p>Cette situation est la première qu'utilise l'enseignant pour introduire l'algèbre selon lui. Il dit avoir toutefois avoir amorcé un travail sur la traduction de relations de comparaison uniquement dans des jeux de fin de période. Pour la présente situation, l'enseignant favorise l'émergence de différents messages qui s'appuient sur une étude du motif. Lors du retour en grand groupe, l'attention est portée sur la validation de chacun des messages exprimés en mots en s'appuyant sur le visuel des motifs. Il a ainsi le souci de coordonner le visuel avec les mots. Suite à la première période, le recours au symbolisme est minoré. Alexandre met l'accent sur le potentiel des formules exprimées en mots pour prédire le nombre maximal de personnes qui peuvent s'asseoir selon le nombre de tables.</p>

On peut remarquer que bien que les enseignants aient tous orchestré la situation du *Restaurant de Marcel*, l'activité de généralisation ou plus spécifiquement le processus de mise en apparence vécu par les élèves diffère dans chacune des classes selon ce que les enseignants valorisent au sujet du développement de la pensée algébrique. Comme formatrices, nous nous sommes données comme rôle de documenter l'activité d'enseignement/apprentissage vécue dans chacune des classes des enseignants participants. On peut ici documenter les différentes facettes d'un même objet (voir tableau 1). Mais le rôle de formateur va plus loin, il s'agit d'animer une discussion de groupe sur les différentes intentions qui ont animées les enseignants lors de la mise sur pied de l'expérimentation et sur les activités vécues. Tout en reconnaissant le potentiel de ces différentes manières de faire, il s'agit de revenir aux intentions ciblées au départ (motif de l'activité) par les formatrices et explicitées

lors de la rencontre précédente. Il s'agit aussi de faire voir aux enseignants les différentes facettes (sens de la lettre, émergence d'expressions algébriques dont le sens diffère selon le processus d'objectivation des élèves, niveaux de généralisation reconnus...) d'une pensée algébrique qui se développe dans chacune des classes.

Ainsi dans la classe d'Alexandre, les formatrices reconnaissent l'importance accordée à donner du sens aux expressions algébriques. Elles s'attardent à faire voir aux enseignants tout le travail réalisé par l'enseignant pour aider ses élèves à coordonner la verbalisation des messages de généralisation dégagés au visuel fourni. Elles font alors voir cette contradiction (idéale/matérialisée dans l'activité de la classe) qui peut mieux s'expliquer dans l'association des niveaux de généralisation de Radford (2003). Le retour en grand groupe animé dans la classe d'Alexandre reste donc principalement au niveau de généralisation contextuelle. Celle-ci comporte encore des références aux particularités des objets du contexte et de leurs caractéristiques en référence à la situation spatio-temporelle. Les messages de généralisation restent contextuels au sens où leur mode de désignation dépend encore des propriétés spatiales. Comme le spécifie Radford (2003), les «arguments» ou «variables» ne sont plus des nombres, mais des objets génériques qui sont désignés par des termes génériques tels que «la figure», «la prochaine figure». D'autres contradictions sont ressenties par les formatrices lors de la présentation des approches de Stéphane et d'Annie mais elles ne sont pas du même ordre, de la même nature. En effet, l'ajout d'une table de valeurs dans la situation (approche d'Annie) limite les expressions dégagées par les élèves, ce qu'a pu observer l'enseignante. Des tensions sont de deux ordres, d'une part, il ne s'agit plus ici de travailler sur les différentes symbolisations possibles et sur une diversité d'expressions qui sont porteuses de sens pour les élèves, la recherche d'une règle semble prendre le pas. D'autre part, le travail de généralisation engagé par les élèves semble escamoté par l'application d'une procédure (à chaque table qui s'ajoute, il y a deux personnes de plus donc on inscrit «fois deux» dans la formule). Cette contradiction a été moteur de changement chez l'enseignante qui en a elle-même pris conscience en comparant l'activité de sa classe avec celle de ses pairs.

Dans le cas de l'approche de Stéphane, les interventions des formatrices ne sont pas du même ordre puisque les intentions visées sont rencontrées, mais l'accent est mis sur le travail autour des registres de représentation. Il s'agit alors de faire voir aux enseignants que l'exercice de convertir une expression dans une autre registre et d'y coordonner les différentes significations est une tâche exigeante pour les élèves qui amorcent leurs apprentissages au sujet de la généralisation algébrique. Il ne s'agit pas de dire aux enseignants que ce qu'ils font est incorrect ou qu'il y a contradiction, au sens d'Engestrom (2001), selon «notre système formatrice», mais plutôt de les aider à percevoir les différentes facettes qui s'enchevêtrent lorsqu'il s'agit de réfléchir au travail de généralisation algébrique.

Conclusion

L'étude des activités d'enseignement/apprentissage qui ont cours dans les différentes classes des enseignants que nous accompagnons illustre différentes manières de faire d'enseignants qui, bien que partant d'une même situation, ont des motifs différents. Dans notre rôle de chercheuses investigatrices des séances de classe, nous étudions la matérialisation de l'expression de la pensée algébrique dans chaque classe soit cette expression de contradictions entre ce que les enseignants visent et ce qui se matérialise. Dans notre rôle de formatrice, c'est en nous appuyant sur ces différentes manières de faire que l'on rend apparentes différentes facettes qui colorent toutes l'expression d'une pensée algébrique mais qui la façonnent toutefois de façon différente.

Remerciements

Les données et résultats présentés dans le texte proviennent d'une recherche-action dont le titre est «Co-construction, mise à l'essai, analyse et partage de situations didactiques visant à favoriser la

transition arithmétique/algèbre». Ce projet a été subventionné dans le cadre du programme de soutien à la formation continue du personnel scolaire, Chantier 7, du Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2013-2017).

Références

- Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogical imagination*. Austin: University of Texas Press.
- Bednarz, N. (2009). Recherches collaboratives en enseignement des mathématiques : Une nouvelle entrée sur la conception d'activités en mathématiques à l'intersection de pratique en classe et recherche. In Quaderni di Ricerna in Didattica Matematica (supp. No.2), 3-18. *Actes du 61^e colloque de la CIEAEM*.
- Bednarz, N., & Proulx, J. (2010). Développement professionnel des enseignants en mathématiques. Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques. *Éducation et Formation*, 293, 21-36.
- Conseil supérieur de l'éducation (2014). *Le développement professionnel, un enrichissement pour toute la profession enseignante - sommaire*. Retrieved from <http://www.cse.gouv.qc.ca/FR/Publications/index.html>.
- Day, C. (1999). *Developing Teachers: The Challenges of Lifelong Learning*. London: Falmer Press.
- Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.
- Gagnon, B. (2010). Le conseiller pédagogique, un partenaire pour vivre les changements en éducation au Québec. *Vie Pédagogique*, 153. Retrieved from <http://collections.banq.qc.ca/ark:/52327/bs1988437>
- Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. *Proceedings of a National Symposium*, may 27 and 28, 1997. *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum* (p. 25-26). Washington, D.C.: National Academy Press.
- Langemeyer, I., & Roth, W.-M. (2006). Is cultural-historical activity theory threatened to fall short of its own principles and possibilities as a dialectical social science? *Outlines. Critical Social Studies*, 8(2), 20–42.
- Lessard, C. (2008). Entre savoirs d'expérience des enseignants, autorité ministérielle et recherche : les conseillers pédagogiques. In P. Perrenoud, M. Altet, C. Lessard et L. Paquay (dir.). *Conflits de savoirs en formation des enseignants (pp. 169-181)*. Bruxelles, Belgique : De Boeck.
- Potari, D., Psycharis, G., Sakonidis, H. & Zachariades, T. (2018). Collaborative design of a reform-oriented mathematics curriculum: contradictions and boundaries across teaching, research, and policy. *Educational Studies in Mathematics*, volume 102, p. 417–434.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 1 – 27.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.
- Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Roth, W.-M. (2014). Science language Wanted Alive: Trough the dialectical/dialogical lens of Vygotsky and the Bakhtin circle. *Journal of Research in Science Teaching*, 51, 1049-1083.
- Squalli, H., Mary, C., & Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. In J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.). *Recherches et expertises pour l'enseignement. Technologie, sciences, mathématiques* (p. 67-78). Bruxelles: DeBoeke Université.
- Tardif, M., Lessard, C., & Gauthier, C. (1998). Formation des maîtres et contextes sociaux. Perspectives internationales. *Revue des sciences de l'éducation*, 24 (3), 682–683.