

INTERTEXTUALITY AND SEMIOSIS PROCESSES IN THE ALGEBRAIC RESOLUTION OF VERBAL PROBLEMS

INTERTEXTUALIDAD Y PROCESOS DE SEMIOSIS EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES

Juan Manuel Córdoba-Medina

Escuela Normal Superior del Estado de México
juancordoba1974@gmail

Eugenio Filloy-Yagüe

Matemática Educativa – Cinvestav IPN
smmeef@aol.com

In this research, we used the Local Theoretical Models as a theoretical and methodological frame and Pierce's theoretical perspective on semiotics. At the end of the study carried out with secondary school students, authors identified strata of intertextuality derived from the processes of semiosis, based on acts of reading/transformation of texts or reading/translation/transformation of the textual spaces proposed in the teaching model through solving verbal problems using grade two equations with an unknown, adopting the Mixed Method (geometric and algebraic), and the Cartesian Methods that include algebraic procedures with paper and pencil and a symbolic calculator with a Computation Algebraic System.

Keywords: Intertextuality, semiosis processes, sense production, verbal problems.

There are various difficulties that secondary school students face during the process of learning algebra; for instance, they fail to identify the structures underlying algebraic expression, surface structure, and systemic structure as in Kieran (1989). Also, in Filloy & Córdoba (2013), Córdoba (2016), authors assert that it is usual when working with algebraic expression, that occur several types of syntax errors, either arithmetic or algebraic, or when solving equations of grade one (EG1) and of grade two (EG2), in such a way that students cannot be considered competent users of a Mathematical Sign System (MSS) yet. They are in the process of reading the mathematical text correctly and distinguishing the allowed transformations from those that are not.

Some researchers (Gallardo, 2002; Kieran, 2006; Solares, 2007; Rojano, 2010; Martínez, 2012; Filloy & Córdoba, 2013; Bonilla, 2014; Córdoba, 2016) consider that in the transition from arithmetic to algebra it is essential that secondary school teachers recognize as fundamental that students learn the properties and relationships of the arithmetic MSS (MSS1) and that the incomplete knowledge of these implies operational difficulties with MSS of algebra (MSS2).

Purpose of the study

The purpose of the qualitative experimental study carried out by Córdoba (2016) was to observe and analyze the semiosis processes of the students (study subjects), as a result of reading/transforming mathematical texts, for the production of meaning in the process of algebraic solving of verbal problems (VP) by EG2 with an unknown.

Theoretical framework

The theoretical and methodological framework proposed by Filloy (1999), for experimental observation in Educational Mathematics, called Local Theoretical Models (LTMs), allows us to account for the processes that are developed when certain specific mathematical contents are taught within the National Educational System to some students, which must be relevant to the phenomena under study; LTMs contemplate four interrelated components and their corresponding models: 1) Teaching Model, 2) Model of Cognitive Processes, 3) Model of Formal Competence, and 4) Model of Communication. Filloy (1999) defines a Teaching Model (TM), as a sequence of texts produced by both the teacher and the student, and these texts are the result of the work of both in problem

teaching situations - which are taken as spaces textual. "In algebra, textual spaces are made up of Mathematical Sign Systems whose codes and traditions come from the meanings attributed to them for their social use". (Fillooy, Rojano & Puig, 2011).

From Peirce's theoretical perspective on semiotics, what is a sign? For Peirce the fundamental thing in the sign is its function, when describing the semiotic process, rather than signs, it refers to sign functions. That sign, vital, constant, and meaningful process is the semiosis. Elizondo (2012). We find it relevant to differentiate text and textual space (TS), which corresponds to the distinction between meaning and sense. It is also relevant to understand the use that teachers and students assign to mathematical text. Filloy affirms that the notion of text is introduced to be used in the analysis of any practice of meaning production. (Fillooy, Rojano, & Puig, 2008; Kieran & Filloy, 1989). A text is the result of the reading/transformation made on an TS, whose purpose is to produce sense and only extract meaning in that space (Fillooy, Rojano, & Puig, 2008). Textual space is a system that imposes a semantic restriction on the person who reads it; the text is a new articulation of that space, individual and unrepeatable, made by a person as a result of an act of reading. Thus, an TM as a component of an LTM (Fillooy, 1999) is a succession of texts that are taken as an TS to be read/transformed into another ET as the learner gives meaning in his readings (Rojano, 2010).

The MC process involves putting a problem into equations or a process of translating the given VP statement in natural language into algebraic language. On one hand, to accomplish an analytical reading that prepares the text of the problem by producing another text that in a certain way is in course to be translated into algebraic language. On the other hand, to work at the level of expression in the algebraic language that transforms the translated text (equation) into a text that can be solved, that is, the equation in its canonical form. (Puig, 2012).

Research Method

For this research, we designed and developed an LMT composed of the four models referred to. In the TM, we recovered elements for the didactic use of syntax errors in the development of algebraic thinking. From the study of Córdoba (2005); we observed with a clinical interview with teaching (ECT) situation, the performances of nine third graders of Secondary Education in the State of Mexico; but as a matter of space we will only refer to the case of Fer, when solving VP through EG2 using pencil and paper procedures and CAS as a symbolic manipulator. It was also used their modeling through the use of a didactic material called Algebraic Puzzle proposed by Larrubia (2005), which allowed analyzing the interaction of the learners with the MSS1, the MSS2 and the TM.

Results

In his doctoral thesis, Córdoba (2016) identified three types of intertextuality strata derived from the semiosis processes; it also described three levels of competence of MSS2 use (low, intermediate and high) of each; the above, from the ECT with students, in which the author asked them to solve VP using EG2 with an unknown, which are part of the TM. Below are the general characteristics of the intertextuality strata.

The first intertextuality stratum: *Reading/writing of texts in a network of textual relationships*, refers to the acts of reading/writing of algebraic text that a specific reader does base on a network of textual relationships derived from his/her prior mathematics and linguistics experiences. In particular, in this study, emerge three levels of MSS2 use competence of learners when asked them to solve EG2 with one unknown.

The second intertextuality stratum: *Reading/transformation of superficial structure of algebraic texts*, refers to the way the learners solve the given EG2 (complete and incomplete) from the recognition of shallow structure. Learner performed algebraic transformations between algebraic texts at the level of algebraic expression; this also require the learner to identify the shallow structure of the equation and its transformation from the factored form to the canonical form or vice versa.

The third intertextuality stratum: *Reading/translating/transformation of text*, refers to the algebraic resolutions of a VP through EG2 with one unknown; in this regards, it is common to use MC, defined as the process to pose a problem as an equation, which implies the process of translation and the algebraic transformations describe in second intertextuality stratum.

A brief description and analysis of a clinical interview episode with teaching, conducted by the Researcher (R) with Fer (F), is included to exemplify the third intertextuality stratum "Reading/translation/transformation of texts" in the resolution of a VP.

R: The square of the number plus the triple of the same number gives us fifty-four. What is that number and how do you state the equation?

F: Well, the first number is equis, and plus three times the same number, then it would be three equis! [writes with a certain separation x and $3x$ on the board, stays watching and mentions...] but as it says, the square of a number, we raise to the square equis, plus three equis equal to fifty-four [he writes $x^2 + 3x - 54 = 0$], the equation is square equis plus three equis equal to fifty-four, but if the fifty-four we pass it on the other side and match it with zero, then we would have... [he writes $x^2 + 3x - 54 = 0$ and continued the solving process by factoring the second-degree trinomial written on the first equation member until the two equis ($x_1 = -9$, $x_2 = 6$)].

R: Well, you obtained two values, one positive and one negative and the question of the problem is: What is the number? However, the VP refers: the square of a number plus the triple of the same number gives us fifty-four. What value do you consider adequate? [Fer stays thinking]

F: I will try first by substituting the value of six in the equation $(x)^2 + 3x = 54$, [he writes $(6)^2 + 3(6) = 54$, $36 + 18 = 54$ and obtains $54 \equiv 54$, then he doses the same with value -9 , and concludes by saying that he value sought is six].

In this episode you can see significant progress towards algebraic syntax, his personal intertexts allow him to make an efficient reading of the proposed problem statement. He verbally evokes how he carries out his reasoning, which allow him to pose a EG2 with one unknown that represents the translation. The student's semiosis process shows his competence in the use of MSS2 at a high level; he also formulates the correct answer of the problem because he proved the equality of the equation by substituting the values of the unknown. The above gives sense to the algebraic procedures carried out.

Conclusions

The teaching model used in this study allowed to enhance the semiosis processes, the intertextuality and the production of meaning in the study subjects from the manipulation of Algebraic Puzzle pieces, that were useful for concrete modeling of the equations written in its canonical form $ax^2 \pm bx \pm c = 0$, where $a, b, c \in \mathbb{Z}$, and thus provide meaning and senses to equivalent equations syntactically obtained from this solving process with pencil and paper, that the competent user of the MSS2 wrote in its factored form $(x \pm a)(x \pm b) = 0$, or by CAS.

The results presented are not conclusive. It is necessary to carry out studies that deepen the reading/transformation processes and the consequent production of meanings by the students, through the design of a teaching model that allow them to evolve towards the construction of the algebraic syntax around the MC of EG2 resolution, based on their intertexts during the semiosis processes that students use as competent users of the MSS2 to solve those VP posed.

References

- Córdoba, J. (2005). *Uso didáctico de errores de sintáxis en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Tesis de Maestría no publicada. México: CINVESTAV-IPN.
- Córdoba, J. (2016). *Intertextualidad y producción de sentido en la lectura/transformación de textos algebraicos en la enseñanza/aprendizaje en secundaria*. Tesis doctoral no publicada. México: CINVESTAV-IPN.

- Bonilla, M. (2014). *Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual*. Tesis doctoral no publicada. México: CINVESTAV-IPN.
- Elizondo, J. (2012). *Signo en acción. El origen común de la semiótica y el pragmatismo*. México: Paidós Comunicación
- Filloy, Yagüe E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa. Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E. & Córdoba, J. (2013). La intertextualidad en el uso competente del sistema matemático de signos algebraico/Intertextuality in the competent use of mathematical system of algebraic signs. *Proceedings of the Forts Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*, pp. 127-132. Calgary, Canada.
- Filloy, E., Rojano, T.; & Puig, L. (2011). *Intertextuality in Algebra. Empirical Evidence Concerning the Solution of Word Problems and of Linear Equations Systems*. 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1, pp. 296 Ankara, Turkia.
- Filloy, E. Rojano T., & Puig L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. USA: Springer.
- Gallardo, A. (2002). The extensión of the natural number domain to the in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics* 49:171-192. Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (23-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, (7) 230-240.
- Larrubia, J. (2005). *Resolución de ecuaciones de segundo grado con puzzle algebraico en 3° de ESO*. Tesis de Doctorado. España: Universidad de Málaga.
- Martínez, M. (2012). *De la modelación concreta-dinámica al sistema matemático de signos del álgebra: lectura/transformación de textos en la resolución de ecuaciones lineales*. Documento Pre-Doctoral. México: CINVESTAV-IPN.
- Peirce, C. S. (1987). *Collected Papers (1931-1966)*. Cambridge, Belknap Press, Vol. 8.
- Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. *Investigación en Educación Matemática XVI* (Anexo, pp. 1-20). SEIEM. Jaén.
- Puig, L. (2003a). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*. Actas del VII Simposio de la SEIEM, pp. 97-108. Granada: Universidad de Granada.
- Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas*, Vol. 75, pp. 5-20.
- Solares, A. (2007). *Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incógnita*. Tesis doctoral no publicada. México: CINVESTAV-IPN.

INTERTEXTUALIDAD Y PROCESOS DE SEMIOSIS EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES

INTERTEXTUALITY AND SEMIOSIS PROCESSES IN THE ALGEBRAIC RESOLUTION OF VERBAL PROBLEMS

Juan Manuel Córdoba Medina

Escuela Normal Superior del Estado de México
juancordoba1974@gmail

Eugenio Filloy Yagüe

Matemática Educativa – Cinvestav IPN
smmeef@aol.com

En esta investigación se utilizó como marco teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales y la perspectiva teórica sobre semiótica de Pierce. Al final del estudio realizado con estudiantes de secundaria se identificaron estratos de intertextualidad derivados de los procesos de semiosis, con base en actos de lectura/transformación de textos o de lectura/traducción/transformación de los

espacios textuales propuestos en el Modelo de Enseñanza para la resolución de Problemas Verbales mediante Ecuaciones de Grado dos con una incógnita, empleando el Método Mixto (geométrico y algebraico) y el Método Cartesiano que incluye procedimientos algebraicos con lápiz y papel, y una calculadora simbólica con un Sistema Algebraico Computacional.

Palabras clave: Intertextualidad, procesos de semiosis, producción de sentido, problemas verbales.

Son diversas las dificultades que enfrentan los estudiantes de secundaria en su proceso de aprendizaje del álgebra, por ejemplo, no identifican las estructuras subyacentes a las expresiones algebraicas: estructura superficial y estructura sistémica en términos de Kieran (1989), por otra parte en Filloy & Córdoba (2013), Córdoba (2016), se afirma que es común que se generen diversos tipos de errores de sintaxis al manipular expresiones matemáticas, ya sean aritméticas o algebraicas, o bien, en la resolución de ecuaciones de grado uno (EG1) y ecuaciones de grado dos (EG2), de tal forma que, aún no se les puede considerar usuarios competentes del Sistema Matemático de Signos del Álgebra (SMS2), están en proceso de leer los textos matemáticos de manera correcta y distinguir las transformaciones permitidas de las que no lo son.

Algunos investigadores (Gallardo, 2002; Kieran, 2006; Solares, 2007; Rojano, 2010; Martínez, 2012; Filloy & Córdoba, 2013; Bonilla, 2014; Córdoba, 2016) consideran que en la transición de la aritmética al álgebra es necesario que los profesores de secundaria contemplen como fundamental que sus estudiantes aprendan las propiedades y relaciones del SMS de la aritmética (SMS1), y que el insuficiente conocimiento de éstas se traduce en dificultades de operatividad con el SMS2 y con ello, la lectura/transformación de textos algebraicos

Propósito del estudio

El propósito del estudio experimental de corte cualitativo realizado por Córdoba (2016), fue observar y analizar procesos de semiosis de los estudiantes (sujetos de estudio), como resultado de la lectura/transformación de textos matemáticos, para la producción de sentido en el proceso de la resolución algebraica de problemas verbales (PV) mediante EG2 con una incógnita

Marco Teórico

El marco teórico y metodológico propuesto por Filloy (1999), para la observación experimental en Matemática Educativa, denominado Modelos Teóricos Locales (MTL's), permite dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseñan dentro del Sistema Educativo Nacional determinados contenidos matemáticos concretos a unos estudiantes dados, los cuales deben ser pertinentes para los fenómenos que son objeto de estudio; los MTL's contemplan cuatro componentes interrelacionados y sus correspondiente modelos: 1) Modelo de Enseñanza 2) Modelo de los Procesos Cognitivos, 3) Modelo de Competencia Formal y 4) Modelo de Comunicación. Filloy (1999), define un Modelo de Enseñanza (ME), como una secuencia de textos producidos tanto por el profesor como por el alumno, y esos textos son el resultado del trabajo de ambos en situaciones de enseñanza problema —que se toman como espacios textuales—. “En álgebra, los espacios textuales están constituidos por Sistemas Matemáticos de Signos cuyos códigos y tradiciones provienen de los significados atribuidos a ellos por su uso social”. (Filloy, Rojano & Puig, 2011).

Desde la perspectiva teórica de Peirce en relación con la semiótica ¿qué es un signo? Para Peirce lo fundamental en el signo es su función, al describir el proceso semiótico, más que a signos, se refiere a funciones signicas. Ese proceso signico, vital, constante y significante es la semiosis. Elizondo (2012). Es pertinente hacer una distinción entre texto y espacio textual (ET), la cual se corresponde con la distinción entre significado y sentido, es importante comprender el uso que dan los profesores y los estudiantes a los textos matemáticos. Filloy afirma “... la noción de texto se introduce para ser utilizada en el análisis de cualquier práctica de producción de sentido.” (Filloy, Rojano, & Puig,

2008; Kieran & Filloy, 1989). Un texto es el resultado de la lectura/transformación hecha sobre un ET, cuyo propósito es producir sentido y solamente extraer el significado inherente a dicho espacio. (Filloy, Rojano, & Puig, 2008). El espacio textual es un sistema que impone una restricción semántica a la persona que lo lee; el texto es una nueva articulación de ese espacio, individual e irreplicable, hecha por una persona como resultado de un acto de lectura. Así, un ME como componente de un MTL (Filloy, 1999), es una sucesión de textos que son tomados como un ET para ser leído/transformado en otro ET conforme el aprendiz da sentido en sus lecturas (Rojano, 2010).

El proceso del MC implica poner un problema en ecuaciones, o bien, un proceso de traducción del enunciado del PV dado en lenguaje natural al lenguaje del álgebra, implica: por un lado, la lectura analítica, que prepara el texto del problema elaborando otro texto que en cierta manera está preparado para ser traducido al lenguaje del álgebra, y por otro, un trabajo en el nivel de la expresión en el lenguaje del álgebra que transforma el texto traducido (la ecuación) a otro texto que se sabe resolver; es decir, la ecuación en forma canónica (Puig, 2012).

Método de investigación

En esta investigación se diseñó y desarrollo un MTL integrado por los cuatro modelos referidos, en el ME se retomaron elementos para el uso didáctico de los errores de sintaxis en el desarrollo del pensamiento algebraico, a partir del estudio de Córdoba (2005); se observaron en situación de entrevista clínica con enseñanza (ECE), las actuaciones de nueve estudiantes de tercer grado de Educación Secundaria en el Estado de México; pero por cuestión de espacio solo nos referiremos al caso de Fer, al resolver PV mediante EG2 utilizando procedimientos con lápiz y papel y CAS como manipulador simbólico, además se recurrió a la modelación de éstas, mediante el uso de un material didáctico denominado Puzzle Algebraico propuesto por Larrubia (2005), esto permitió analizar la interacción de los aprendices con el SMS1, el SMS2 y el ME.

Resultados

En la tesis doctoral de Córdoba (2016), se identificaron tres tipos de estratos de intertextualidad derivados de los procesos de semiosis, también se describen tres niveles de competencia de uso del SMS2 (bajo, intermedio y alto) de cada tipo, lo anterior, a partir de las ECE con estudiantes, en las que se les propuso resolver PV mediante EG2 con una incógnita, los cuales forman parte del ME, a continuación se exponen características generales de los estratos de intertextualidad:

El primer estrato de intertextualidad: *Lectura/escritura de textos en una red de relaciones textuales*, se refiere a los actos de lectura/escritura de textos algebraicos que hace un lector concreto con base en una red de relaciones textuales derivadas de sus experiencias matemática y lingüística previas; se observaron tres niveles de competencia de uso del SMS2 de los aprendices cuando se le pide resolver EG2 con una incógnita.

El segundo estrato de intertextualidad: *Lectura/transformación de la estructura superficial de textos algebraicos*, se refiere a la manera en que los aprendices resuelven las EG2 (completas e incompletas) dadas, a partir del reconocimiento de su estructura superficial. Las transformaciones algebraicas se realizan entre un textos algebraicos en el nivel de la expresión algebraica, esto requiere también que el aprendiz identifique la estructura superficial de la ecuación y su transformación de la forma factorizada a la forma canónica o viceversa.

El tercer estrato de intertextualidad: *Lectura/traducción/transformación de textos*, se refiere a la resolución algebraica de PV mediante EG2 con una incógnita, al respecto es común recurrir al uso del MC, definido como el proceso de poner un problema en ecuaciones, que implica el proceso de traducción y las transformaciones algebraicas definidas en el segundo estrato de intertextualidad.

Se incluye una breve descripción y análisis de un episodio de entrevista clínica con enseñanza, realizada por el Investigador (I) con Fer (F), para ejemplificar el tercer estrato de intertextualidad "Lectura/traducción/transformación de textos" en la resolución de un PV.

I: El cuadrado de un número más el triple del mismo número nos da cincuenta y cuatro. ¿Cuál es ese número? y ¿cómo plantearías la ecuación?

F: ¡Pues, el primer número es equis, y más el triple del mismo número, entonces sería tres equis! [escribe con cierta separación x y $3x$ en el pizarrón, se queda observando y menciona...] pero como dice, el cuadrado de un número, elevamos al cuadrado equis, más tres equis igual a cincuenta y cuatro [escribe $(x)^2 + 3x = 54$], la ecuación es equis cuadrada más tres equis igual con cincuenta y cuatro, pero si el cincuenta y cuatro lo pasamos del otro lado y lo igualamos con cero, entonces nos quedaría... [Escribe $x^2 + 3x - 54 = 0$ y continuó con el proceso de resolución factorizando el trinomio de segundo grado escrito en el primer miembro de ecuación hasta encontrar los dos valores de equis ($x_1 = -9$, $x_2 = 6$)].

I: Bueno obtuviste dos valores, uno positivo y otro negativo y la pregunta del problema dice: ¿cuál es el número? Sin embargo, el PV refiere: el cuadrado de un número más el triple del mismo número nos da cincuenta y cuatro. ¿Qué valor consideras adecuado? [Fer se queda pensando]

F: Probaré primero sustituyendo el valor de seis en la ecuación $(x)^2 + 3x = 54$ [escribe $(6)^2 + 3(6) = 54$, $36 + 18 = 54$, obteniendo $54 \equiv 54$, después hace lo propio con el valor de -9 , concluye diciendo que el valor buscado es seis].

En este episodio se puede observar un progreso significativo hacia la sintaxis algebraica, sus intertextos personales le permitieron realizar una lectura eficiente del enunciado del problema propuesto, evoca de manera verbal cómo realiza su razonamiento, esto le permite plantear la EG2 con una incógnita que representa la traducción correspondiente; los procesos de semiosis del estudiante dan cuenta de su competencia de uso del SMS2 en un nivel alto, así mismo, enuncia la respuesta correcta del problema, con base en haber realizado la comprobación de la igualdad de la ecuación sustituyendo los valores obtenidos de la incógnita, lo anterior, dota de sentido a los procedimientos algebraicos efectuados.

Conclusiones

En particular el ME utilizado en este estudio, permitió potenciar los procesos de semiosis, la intertextualidad y la producción de sentido en los sujetos de estudio, a partir de la manipulación de las piezas del Puzzle Algebraico, siendo útil para modelar de manera concreta las ecuaciones escritas en su forma canónica: $ax^2 \pm bx \pm c = 0$ donde $a, b, c \in Z$ y con ello, dar significado y sentido a las ecuaciones equivalentes obtenidas en dicho proceso de resolución de manera sintáctica con lápiz y papel, y que son escritas por el usuario competente del SMS2 en su forma factorizada: $(x \pm a)(x \pm b) = 0$, o bien, por el propio CAS.

Los resultados expuestos no son concluyentes, se requiere realizar estudios que profundicen más en los procesos de lectura/transformación y la consecuente producción de sentido por parte de los estudiantes, diseñando un ET que les permita evolucionar hacia la construcción de la sintaxis algebraica alrededor del MC de resolución de EG2, teniendo como base el uso de sus intertextos personales durante los procesos de semiosis a los cuales recurren para resolver como usuarios competentes del SMS2, los problemas verbales que se les propongan.

Referencias

- Córdoba, J. (2005). *Uso didáctico de errores de sintaxis en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Tesis de Maestría no publicada. México: CINVESTAV-IPN.
- Córdoba, J. (2016). *Intertextualidad y producción de sentido en la lectura/transformación de textos algebraicos en la enseñanza/aprendizaje en secundaria*. Tesis doctoral no publicada. México: CINVESTAV-IPN.
- Bonilla, M. (2014). *Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual*. Tesis doctoral no publicada. México: CINVESTAV-IPN.
- Elizondo, J. (2012). *Signo en acción. El origen común de la semiótica y el pragmatismo*. México: Paidós Comunicación

- Filloy, Yagüe E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa. Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E. & Córdoba, J. (2013). La intertextualidad en el uso competente del sistema matemático de signos algebraico/Intertextuality in the competent use of mathematical system of algebraic signs. *Proceedings of the Forts Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*, pp. 127-132. Calgary, Canada.
- Filloy, E., Rojano, T.; & Puig, L. (2011). *Intertextuality in Algebra. Empirical Evidence Concerning the Solution of Word Problems and of Linear Equations Systems*. 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1, pp. 296 Ankara, Turkia.
- Filloy, E. Rojano T., & Puig L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. USA: Springer.
- Gallardo, A. (2002). The extensión of the natural number domain to the in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics* 49:171-192. Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (23-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, (7) 230-240.
- Larrubia, J. (2005). *Resolución de ecuaciones de segundo grado con puzzle algebraico en 3° de ESO*. Tesis de Doctorado. España: Universidad de Málaga.
- Martínez, M. (2012). *De la modelación concreta-dinámica al sistema matemático de signos del álgebra: lectura/transformación de textos en la resolución de ecuaciones lineales*. Documento Pre-Doctoral. México: CINVESTAV-IPN.
- Peirce, C. S. (1987). *Collected Papers (1931-1966)*. Cambridge, Belknap Press, Vol. 8.
- Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. *Investigación en Educación Matemática XVI* (Anexo, pp. 1-20). SEIEM. Jaén.
- Puig, L. (2003a). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*. Actas del VII Simposio de la SEIEM, pp. 97-108. Granada: Universidad de Granada.
- Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas*, Vol. 75, pp. 5-20.
- Solares, A. (2007). *Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incógnita*. Tesis doctoral no publicada. México: CINVESTAV-IPN.