DIFFICULTIES TO JUSTIFY GEOMETRIC PROPOSITIONS WHEN SOLVING LOCI PROBLEMS WITH GEOGEBRA

DIFICULTADES PARA JUSTIFICAR PROPOSICIONES GEOMÉTRICAS AL RESOLVER PROBLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS CON GEOGEBRA

José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora
jlsoto@mat.uson.mx

Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora
maurr@mat.uson.mx

César Fabián Romero Félix
Universidad de Sonora
cesar.romero@unison.mx

A study developed with engineering students from the University of Sonora, Mexico, about their difficulties to justify geometric propositions is presented here. The work is framed within an Analytical Geometry course designed with GeoGebra as support, and refers the topic of loci. The theory of geometric paradigms is used to explain these difficulties and the study reveals that the geometry education of students entering University is mainly limited to natural geometry, showing a precarious familiarity with the methods of natural axiomatic geometry.

Keywords: Geometry and Geometrical and Spatial Thinking, Instructional activities and practices, Technology

Introduction

To explore the extent to which engineering students can justify geometric propositions, five teaching sequences on the subject of geometric loci have been designed. The sequences have been designed to be implemented with GeoGebra, taking as reference the methods used by Descartes (1954, pp. 50-55) in the presentation of his hyperbolograph, to identify the geometric relationships of the construction and find the equation of the hyperbola. The activities were proposed in an Analytical Geometry course taught to 35 Civil Engineering students during the first semester of 2018.

Theoretical elements

Students' responses were analyzed within the framework of the geometric paradigm theory proposed by Houdement and Kuzniak (2003); According to these authors, under the term elemental geometry, three distinct types of paradigms coexist that lead to the distinction of three types of geometry: *natural geometry*, *natural axiomatic geometry* and *formalist axiomatic geometry*. The first two geometries are described below, as they are those used in the present work, as written by Kuzniak (2006):

Natural geometry can be seen as an empirical science in which objects are closely linked to reality, which can be measured and physically compared. The propositions in this geometry are validated experimentally as they depend on the sensory perception of them.

In *natural axiomatic geometry,* geometric objects are only approximations to reality and are defined by the axioms of classical Euclidean Geometry. The propositions here are validated by demonstrations constructed from euclidian axioms and previously proven geometric results.

In the design of the teaching sequences, we attempt to recover the ideas developed by Descartes on geometric loci, particularly those in the construction of the hyperbolograph (Descartes, 1954, pp. 50-55). From Descartes's method we retake two main principles:

1. Identification of the quantities that change and those that remain constant during the plotting of the curve and the relationships between them, as shown in Arcavi (2000).
2. Deduction requires the use of the methods of natural axiomatic geometry, since it is based on the properties of similar triangles, established as theorems in this geometry.

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Both characteristics seem desirable to us in the mathematical formation of an engineer, the first because of the importance it has in algebraic modeling of geometric situations and the second because it facilitates the explanation and argumentation of geometric results.

Design and implementation of didactic sequences

Based on the ideas of Descartes, Arcavi and Kuzniak, and the use of GeoGebra, we have developed a series of didactic sequences on the notion of loci. The main goal is for engineering students to justify some elementary geometric results with arguments typical of natural axiomatic geometry.

There is a total of five sequences on which the students worked over a two-week period, where each student had a computer with GeoGebra installed and worked independently. In all the sequences, the students are first offered a construction in GeoGebra, in which the Cartesian axes are omitted so that students can concentrate on the elements of the construction and the relationships that manifest by varying the elements of the figures. As an example, the following table summarizes the objectives and characteristics of sequence 2.

Table 1 Characteristics of Sequence 2

Objectives: a) Identify the relationships between quantities, which are preserved by varying k and presenting geometric arguments about their veracity. b) Verify that the curve plotted by P is a circumference and geometrically justify this result. c) Algebraically represent the relationships identified in (a). d) Find the equation in terms of s and t of the circumference of Figure 1b, and in terms of x and y in Figure 1c.		
Characteristics of the constructions		
AB is a fixed line, *CBD* is an angle of value *k*, *BE* is the bisector of *CBD*, *AP* is parallel to the bisector traced from *A*, and *P* is the intersection between *AP* and *BP*.	The construction is the same as in Figure 1a, but it adds a perpendicular to *AB* from *P* that intersects *AB* in *Q*, also labels segment *BQ* as *s* and *QP* as *t*.	The construction is the same as shown in Figure 1b but has been translated and rotated so that the AB line matches the *X-axis* and to and *B* match the origin.
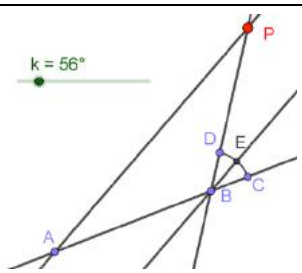	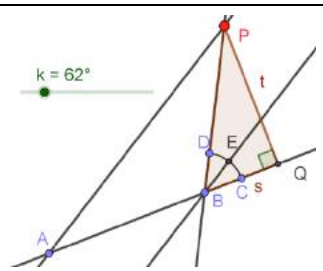	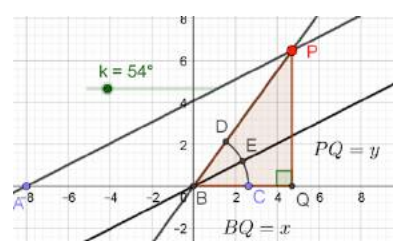
Figure 1a	Figure 1b	Figure 1c

This sequence begins with the GeoGebra construction from Figure 1a, in which the student is asked to explore the construction by varying the slider *k*, which controls the CBD angle, and to note that the point P describes a circumference when moving the construction. The tasks here are intended to systematize exploration: that those quantities (measures of angles and segments) that change are first distinguished from those that remain constant, and then that the students establish the possible relationships between these quantities, mainly equality relationships. The work with this construction concludes by requesting the students to geometrically justify the detected relationships. The sequence concludes with the introduction of Cartesian coordinates to be used as a reference (Figure 1c) and algebraically express the curve drawn by point *P* when the parameter *k* is changed.

Analysis

Throughout the development of these activities, we have focused our attention on the questions in which students are asked to justify some geometric proposition, since our main interest is to observe the nature of the arguments they built. We will focus our analysis on the answers to these questions in sequence 2.

In this activity, having explored the construction shown in Figure 1a, and once they have established which angles remain the same when dragging *k*, students seamlessly conclude that the triangle *ABP* is isosceles. As can be seen in the following responses, their difficulties begin when they try to justify some of the results obtained. Item (d) of the worksheet asks them to justify why does the triangle remains isosceles and item (e) asks them to justify why does the segment *BP* works as the radius of the circle, i.e. why does its magnitude not change. The construction provides data on the angles and on the segment *AB*, it was expected that they would conclude that the triangle *ABP* is isosceles on the basis that two of their angles always remain the same and that they could argue that *as a consequence* their opposite sides AB and BP should always be the same.

Four types of responses were detected, illustrated below:

In the first type we place the students who have offered answers whose forms of argumentation are inconsistent, in which arguments that appear to be located in Paradigm 2 are mixed with others based on facts observed with little or no relation to what is asked to justify. In this case we locate the following answers:

Table 2 Example of type 1 answers

d)	It is isosceles since two angles remain the same, since they are co-corresponding angles with others and thus we can determine if they are equal or not.
e)	Because it acts as the radius of a circle that which always has the same magnitude and is linked to a center as in the current case.

In a second case, another student uses the isosceles triangle definition to justify that the triangle is isosceles. And when he tries to justify why the segment *BP* maintains its constant magnitude, he uses its visual perception as a source of argumentation.

Table 3 Example of type 2 answers

d)	Because it has two equal angles and two equal sides, which are characteristics that made it an isosceles triangle
e)	Because the construction makes the segment AP to always be of fixed length.

It is clear that the students located in this case do not recognize the hypotheses of the problem and confuse the causes with the effects on the construction, indicating that they do not base their response on a deductive reasoning and are therefore located in Paradigm 1.

In the third type of responses the students mix Paradigm 1 ways of arguing with arguments specific to Paradigm 2, this is the case of the following response, which provides an answer to item (d) that was independent from the observation, but does not make it clear that equality of the angles implies equality of the sides, instead the student responds to item (e) very clearly that in the case of an isosceles triangle with a fixed side, the other side must have a fixed length. We consider that the answer to the first item does not correspond to Paradigm 2, but its response to the second item fits in the ways of arguing specific to this paradigm.

Table 4 Example of type 3 answers

d)	Despite of its movement there is still two equal sides and two equal angles.
e)	Segment *AB*'s length is 8 and as it is an isosceles triangle it's the same as *BP*, then, despite the movement, they will measure the same and stay constant.

Finally, the fourth type of response includes those that can be located in Paradigm 2, where it is observed that the student recognizes the data provided as hypotheses from which he can build his arguments. The following two responses illustrate this case.

Table 5 Example of type 4 answers

d)	Because it has two equal internal angles and therefore the opposite sides to the angles are equal.
e)	Since the triangle is isosceles, it forces the segment *BP* to remain the same length as *AB*, and as *AB* never changes, neither does *BP*.

Conclusions

Of the 35 students who were part of the group, 8 of them were able to present arguments to justify propositions, which can be located in Paradigm 2, those represented in the Type 4 responses. The rest, to some extent, showed arguments of Paradigm 1. This proportion illustrates a serious problem, showing that most students are unable to use deductive arguments to justify geometric propositions. We emphasize that their responses indicate that they can identify geometric facts, but they cannot present deductive arguments to explain them.

These results motivate us to, in the future, study the characteristics of the teaching of Geometry at the pre-university level, where the source of some of the difficulties observed could be found. Finally, we want to add that the use of GeoGebra has been attractive to students, but this has not been reflected in improving the nature of the arguments put forward by students.

References

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *Journal of Computers for Mathematical Learning 5*: 25–45.

Descartes, R. (1954) *The Geometry*. New York: Dover.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003) Elementary geometry split into different paradigms. In Proceedings of CERME3, Bellaria, Italy: ERME. Retrieved from https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education, 6*(2) 167-187

DIFICULTADES PARA JUSTIFICAR PROPOSICIONES GEOMÉTRICAS AL RESOLVER PROBLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS CON GEOGEBRA

DIFFICULTIES TO JUSTIFY GEOMETRIC PROPOSITIONS WHEN SOLVING LOCI PROBLEMS WITH GEOGEBRA

José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora
jlsoto@mat.uson.mx

Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora
maurr@mat.uson.mx

César Fabián Romero Félix
Universidad de Sonora
cesar.romero@unison.mx

Se presenta aquí un estudio desarrollado con estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora, México, sobre sus dificultades para justificar proposiciones geométricas. El trabajo está enmarcado en un curso de Geometría Analítica diseñado con apoyo de GeoGebra y se refiere al tema de lugares geométricos. Se utiliza la teoría de los paradigmas geométricos para explicar estas dificultades y el estudio revela que la formación en geometría de los estudiantes que ingresan a la Universidad, está limitada principalmente a la geometría natural, mostrando una precaria familiaridad con los métodos de la geometría axiomática natural.

Palabras clave: Geometría y Pensamiento Geométrico y Espacial, Actividades y Prácticas de Enseñanza, Tecnología

Introducción

Con el propósito de explorar hasta qué punto los estudiantes de ingeniería pueden justificar proposiciones geométricas, se han diseñado cinco secuencias didácticas sobre el tema de lugares geométricos. Las secuencias han sido diseñadas para desarrollarse con GeoGebra y tomando como referencia los métodos usados por Descartes (1954, pp. 50-55) en la presentación de su hiperbológrafo, para identificar las relaciones geométricas de la construcción y encontrar la ecuación de la hipérbola. Las actividades fueron propuestas en un curso de Geometría Analítica impartido a 35 estudiantes de Ingeniería Civil durante el primer semestre de 2018.

Referencias teóricas

Las respuestas de los estudiantes se analizaron en el marco de la teoría de paradigmas geométricos propuesta por Hedemount y Kuzniak (2003); según estos autores bajo el término geometría elemental, coexisten tres tipos distintos de paradigmas que conducen a distinguir tres tipos de geometría: la geometría natural, la geometría axiomática natural y la geometría axiomática formalista, se describen a continuación las dos primeras geometrías, que son las que se utilizan en el presente trabajo, según la versión de Kuzniak (2006):

La *geometría natural* puede verse como una ciencia empírica en la que se trabaja con objetos muy ligados a la realidad, que pueden ser medidos y comparados físicamente. Las proposiciones aquí pueden validarse experimentalmente porque dependen de la percepción sensorial que se tiene de ellas.

En la *geometría axiomática natural* los objetos geométricos son solamente aproximaciones a la realidad y son definidos por los axiomas de la Geometría Euclidiana clásica. Las proposiciones aquí son validadas mediante demostraciones construidas a partir de los axiomas euclidianos y de resultados geométricos previamente demostrados.

En el diseño de las secuencias didácticas, se han intentado recuperar las ideas desarrolladas por Descartes sobre lugares geométricos, en particular aquellas que están presentes en la construcción del hiperbológrafo (Descartes, 1954, pp. 50-55). Del método utilizado por Descartes, rescatamos dos características que serán tomadas en cuenta para el diseño de las secuencias:

1. La identificación de las cantidades que cambian y las que permanecen fijas durante el trazado de la curva y de las relaciones entre ellas, tal como se muestra en Arcavi (2000).
2. La deducción exige el uso de los métodos propios de la geometría axiomática natural, puesto que está basada en las propiedades de los triángulos semejantes, establecidas como teoremas en esta geometría.

Ambas características nos parecen deseables en la formación matemática de un ingeniero, la primera por la importancia que tiene en la modelación algebraica de situaciones geométricas y la segunda porque facilita la explicación y la argumentación de resultados geométricos.

Secuencias y aplicación

Retomando las ideas de Descartes, Arcavi y Kuzniak y apoyándonos en el software GeoGebra, hemos elaborado una serie de secuencias didácticas sobre la noción de lugar geométrico. La idea es que los estudiantes de ingeniería justifiquen algunos resultados geométricos elementales con argumentos propios de la *geometría axiomática natural*.

Las secuencias fueron cinco en total y los estudiantes las desarrollaron a lo largo de dos semanas, en un centro de cómputo en el que cada quien contó con una computadora con el software GeoGebra instalado. En todas las secuencias se ofrece primeramente al estudiante una construcción en GeoGebra, en la que se omiten los ejes cartesianos para que los estudiantes se puedan concentrar en los elementos de la construcción y las relaciones que se manifiestan al variar elementos de las figuras. Como ejemplo, la siguiente tabla resume los propósitos y características de la secuencia 2.

Tabla 1 Características de la secuencia 2

Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al variar k y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Verificar que la curva trazada por P es una circunferencia y justificar geométricamente este resultado. c) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). d) Encontrar la ecuación en s y t de la circunferencia de la Figura 1b) y en términos de x y y en la Figura 1c).		
Características de las construcciones		
AB es una recta fija, CBD es un ángulo de medida k, BE es la bisectriz del ángulo CBD, AP es la paralela a la bisectriz trazada por A y P es el punto de intersección de AP y BP.	La construcción es la misma que en la Figura 1a), pero se ha trazado desde P, una perpendicular a AB que interseca a AB en Q y se ha etiquetado como s al segmento BQ y como t al segmento QP.	La construcción es mostrada en la Figura 1b), pero se ha trasladado y rotado para que la recta AB coincida con el eje X y B coincida con el origen.
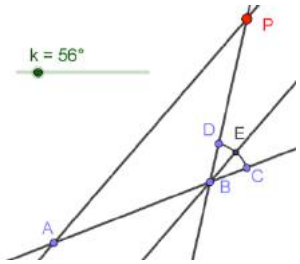	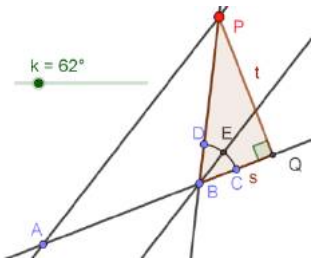	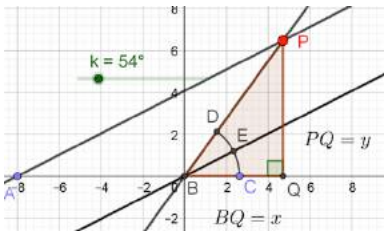
Figura 1a	Figura 1b	Figura 1c

En esta secuencia, se inicia con la construcción de la Figura 1a, en la que se han trazado las rectas AB y BD (de tal forma que BD forme un ángulo de k grados con la recta fija AB), la bisectriz del ángulo CBD y una recta paralela a la bisectriz EB, que pasa por A. Luego se pide al estudiante que explore la construcción haciendo variar el deslizador k, el cual controla el ángulo CBD, y que al mover la construcción observe que el punto P describe una circunferencia. Las tareas aquí pretenden

sistematizar la exploración: que se distingan primero aquellas cantidades (medidas de ángulos y segmentos) que cambian de las que permanecen constantes, durante el movimiento y luego que establezca las relaciones posibles entre estas cantidades, principalmente las relaciones de igualdad. El trabajo con esta construcción concluye con la solicitud al estudiante de que justifique geométricamente las relaciones detectadas. La secuencia concluye con la introducción de coordenadas cartesianas para tomarlas como referencia (Figura 1c) y expresar algebraicamente la curva trazada por el punto P, cuando se hace variar el parámetro k.

Análisis de resultados

A lo largo del desarrollo de estas actividades, hemos concentrado la atención en aquellas preguntas en las que se solicita a los estudiantes justificar alguna proposición geométrica, porque nuestro interés principal es el de observar la naturaleza de las argumentaciones construidas por los estudiantes. Concentraremos nuestro análisis en las respuestas a estas preguntas en la secuencia 2.

En esta actividad, después de haber explorado la construcción mostrada en la Figura 1a y una vez que han establecido cuáles son los ángulos que permanecen iguales al arrastrar k, los estudiantes concluyen sin dificultades que el triángulo ABP es isósceles. Como podrá verse en las respuestas siguientes, sus dificultades empiezan cuando intentan justificar algunos de los resultados obtenidos. En el inciso d) se les pide que justifiquen por qué el triángulo se mantiene isósceles y en el inciso e) se solicita que justifiquen por qué el segmento BP funciona como radio del círculo, es decir por qué su magnitud no cambia. La construcción ofrece datos sobre los ángulos y sobre el segmento AB, se esperaba entonces que llegaran a la conclusión de que el triángulo ABP es isósceles partiendo de que dos de sus ángulos permanecen siempre iguales y pudieran argumentar que por lo tanto sus lados opuestos AB y BP debieran ser siempre iguales.

Se detectaron cuatro tipos de respuestas, que ilustraremos a continuación:

En un primer caso ubicamos a los estudiantes que han ofrecido respuestas cuyas formas de argumentación han resultado poco coherentes, en los cuales se mezclan argumentos que parecieran ubicarse en el Paradigma 2, con otros basados en hechos observados con poca o nula relación con lo que se pide justificar. Ubicamos en este caso las respuestas siguientes:

Tabla 2 Un ejemplo de respuestas de tipo 1

d)	Es isósceles ya que 2 ángulos permanecen iguales ya que son ángulos correspondientes con otros y así podemos determinar si son iguales o no.
e)	Porque actúa como el radio de un circulo el cual siempre tiene la misma magnitud y está anclado a un centro, así como ocurre en el presente círculo.

En un segundo caso, el estudiante recurre a la definición de triángulo isósceles para justificar que el triángulo es isósceles. Y cuando intenta justificar por qué el segmento BP mantiene su magnitud constante, recurre a su percepción visual como fuente de argumentación.

Tabla 3 Un ejemplo de respuestas de tipo 2

d)	Porque tienen dos ángulos iguales y dos lados iguales por lo tanto son características por la cual se conforma un triángulo isósceles.
e)	Porque la construcción obliga a que el segmento AP siempre se mantenga fijo.

Es claro que los estudiantes ubicados en este caso no reconocen las hipótesis del problema y confunden las causas con los efectos en la construcción, lo cual indica que no basan su respuesta en un razonamiento deductivo y por lo tanto se ubican en el Paradigma 1.

En un tercer tipo de respuestas se observa que el estudiante mezcla formas de argumentar del Paradigma 1 con argumentos propios del Paradigma 2, éste es el caso de la respuesta siguiente, en la se ofrece una respuesta al inciso d) que se ha desprendido de la observación, pero no deja en claro que la igualdad de ángulos implica la igualdad de lados, en cambio responde al inciso e) con mucha claridad al respecto de que tratándose de un triángulo isósceles con un lado fijo, el otro lado deberá tener una magnitud fija. Consideramos que la respuesta al primer inciso no corresponde al Paradigma 2, pero su respuesta al segundo inciso cae en las formas de argumentar propias del este paradigma.

Tabla 4 Un ejemplo de respuestas de tipo 3

d)	A pesar de su movimiento siguen siendo con dos lados iguales y tiene ángulos iguales.
e)	El segmento AB mide 8 y al ser triángulo isósceles mide igual que BP, entonces a pesar del movimiento medirán lo mismo y se mantiene constante.

Y el cuarto tipo de respuesta son las que propiamente pueden ubicarse en el Paradigma 2, en donde se observa que el estudiante reconoce los datos proporcionados, como hipótesis a partir de las cuales puede construir sus argumentaciones, las siguientes dos respuestas ilustran este caso.

Tabla 5 Un ejemplo de respuestas de tipo 4

d)	Porque tiene dos ángulos iguales y por lo tanto dos lados iguales que son los opuestos a los ángulos iguales.
e)	Porque al ser triángulo isósceles obliga a que el segmento BP permanezca de la misma magnitud del AB, y como AB nunca cambia, este tampoco.

Conclusiones

De los 35 estudiantes que integraban el grupo, 8 de ellos pudieron presentar argumentos para justificar proposiciones, que pueden ubicarse en el Paradigma 2 y que aquí hemos catalogado como respuestas de Tipo 4. El resto, en mayor o menor medida, mostraron utilizar las formas de argumentación propias del Paradigma 1. Esta proporción ilustra un problema serio, al mostrar que la mayor parte de los estudiantes se encuentran imposibilitados para usar argumentos deductivos al justificar proposiciones geométricas; destacamos que sus respuestas indican que pueden identificar hechos geométricos, pero no pueden presentar argumentos deductivos para explicarlos.

Los resultados nos motivan a estudiar en el futuro las características de la enseñanza de la Geometría en el nivel pre-universitario, en donde pudiera encontrarse la fuente de algunas de las dificultades observadas. Queremos agregar por último que el uso de GeoGebra ha resultado atractivo para los estudiantes, pero esto no se ha reflejado en mejorar la naturaleza de las argumentaciones presentadas por los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *Journal of Computers for Mathematical Learning 5*: 25–45.

Descartes, R. (1954) *The Geometry*. New York: Dover.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003) Elementary geometry split into different paradigms. In Proceedings of CERME3, Bellaria, Italy: ERME. Recuperado desde https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education, 6*(2) 167-187.