

PROPORTIONAL THINKING: A COMPARATIVE STUDY AMONG FOURTH AND FIFTH GRADE CHILDREN

EL PENSAMIENTO PROPORCIONAL: UN ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE NIÑOS DE CUARTO Y QUINTO DE PRIMARIA

Mike Saldaña Guerrero
Cinvestav
mike.saldana@cinvestav.mx

Sofía K. Vázquez Gómez
Cinvestav
sofia.vazquez@cinvestav.mx

The theme of proportionality begins formally in the last years of primary school, and involves the mastery of notions such as comparison of ratios, fractions, and percentages. In this research, a study was carried out with 18 students of fourth and fifth grades of primary education between the ages of 9 and 13, with the objective of assessing their performance in solving problems that involved comparing ratios and having relative thinking. Both types of problems involve proportional thinking. The purpose is to know what is the difference between the two groups, as well as to identify if there is a difference between performance in the two types of problems. It was found that students in both grades have more difficulty in solving relative thinking type problems and that there is no substantial difference between the two groups that participated

Keywords: Problem solving, Reasoning and Proof.

In research aimed at studying proportional reasoning in children who attend primary school, the difficulty they face in solving problems that involve operating with notions such as ratio, fraction and developing relative thinking is recognized.

This report presents the results of a study carried out with children in 4th and 5th grade of primary school using computer software in which two types of problems were presented that required the use of reasoning and relative thinking for their resolution.

Background and theoretical framework

Among the studies that focus on the comparison of ratios, Fishbein, Pampu, and Manzat, (1970) investigated the influence of the total number of marbles, in any set, when comparing ratios between sets, noting the possibility of estimating using $W1/B1$ and $W2/B2$ type ratios. Sing (2001), based on studies with sixth graders students on the understanding of concepts of proportion and ratio when solving problems such as buying sweets, delivering pizzas and a situation of enlarging and reducing a rectangle, emphasizes that it is necessary to have built multiplicative structures and iteration schemes for proportional thinking. Boyer, Levine, and Huttenlocher (2008), conducted two studies using computer programs, based on the application of a proportional equivalence task. They examined where students make mistakes in processing proportions involving discrete quantities.

The interpretation of the results of this study is made within the framework of the following theoretical approaches. Vergnaud (1991), mentions that the first acquisitions of numerical structures are made during the first years of primary school: additive structures and multiplicative structures. Addition is associated with grouping situations, which make it possible through directed situations to know the rules and procedures of the additive structures, necessary for the acquisition of the multiplicative structures. With respect to multiplication, it establishes that the first great form of a multiplicative relation, implies establishing a relation between two quantities of the same type with other two of the same type, that is, there are four quantities put in relation.

Multiplication requires an understanding of functions that assume the quantities involved, notions such as scalar operator, fractional operator, unit value, etc., Vergnaud (1991). According to this

approach it is possible to write relationships and representations between quantities in the form of proportions and arrive at the notion of fraction, ratio and consequently the comparison of ratios. On the other hand, Lamon (1999) defines two types of thinking in the field of proportionality: relative thinking, in which the comparison between two quantities is made from one with respect to the other and not independently, which is what characterizes additive thinking. Noelting (1980), based on his experiment of comparing mixtures of orange juice and water, established a hierarchical differentiation of stages of development of proportional reasoning, based on the comparison of ratios.

Research questions, objectives and method

General objective

To assess whether there is a difference between fourth and fifth grade students in terms of their performance on two types of problems that involve recognizing relationships of proportionality and having relative thinking.

Specific objectives

Recognize how the results of reason comparison problems differ from relative thinking problems.

Observe what difference there is between the results of the fourth grade of primary school students with respect to the fifth grade of primary school students.

Research questions

What is the difference between the results of ratios comparison problems and relative thinking problems?

What is the difference between the results of the fourth grade of primary school students with respect to the fifth grade of primary school students?

Hypothesis

H₀= There is no difference in results between ratios comparison problems and relative thinking problems.

H₁= There is a difference in the results between the problems of comparison of ratios and the problems of relative thinking.

H₀= There is no difference in the answers of 4th grade students compared to 5th grade students in primary education.

H₁= There is a difference in the answers of 4th grade students compared to 5th grade students.

A total of 18 students participated in this research, 10 fourth graders and 8 fifth graders from a private school in Mexico City. The participants were between the ages of 9 and 13, with a mean of 10.17 years and a standard deviation of 0.89.

A program was designed in the PsychoPy software version v.3 .2.3. The program that was carried out in PsychoPy, is the instrument that allowed obtaining the data in the present investigation, it was made up of three general parts, the first one presented the instructions of the activity to the students, in the following part of the instrument eight problems of the type comparison of reasons were presented to the students, the activities carried out by Noelting (1980) were taken as a model, in the third part of the instrument eight problems in the category relative thought were proposed, some activities carried out by Lamon (1999), referring to relative and absolute thought were taken into account and others were adapted. For the implementation the institution provided access to the computer room and the test was done twice to each student, when the children arrived at the room they were informed that it was an investigation that was being done for a university and that it was not to qualify them.

Results and discussion.

The procedure implemented to evaluate the answers was to calculate the percentage of correct answers per student in the first moment, then to calculate the percentage of correct answers per student in the second moment and finally to calculate the average of moments one and two.

With the mean of the moments one and two of the students, an analysis of variance (ANOVA) of repeated measures (grade five vs. grade four) X2 (Types of problems: Comparison of ratios vs. relative thinking) was performed in the statistical program called JASP. The school grade is defined as the inter-subject variable and the problem type variable is defined as the intra- subject variable.

For the main effect with respect to the types of problems, within subjects, a large statistic of $F(49,201)$, ($0.001 < p$) is reported, it can be said that without considering the group that responded to the instrument there are significant differences with respect to the two types of problems presented, the problems of comparison of reasons with respect to the problems of relative thinking. That is to say, the students of both courses respond better to the problems of comparison of reasons than to those of relative thinking, in this way the null hypothesis is rejected and the alternative hypothesis is accepted which mentions that if there is a difference between both types of problems.

On the other hand, another effect within subjects in relation to the two school grades is reported as a statistic $F(0.274)$, ($p= 0.608$) this indicates that there is no difference between the two groups that answered the instrument. The ANOVA test suggests that in this case, regardless of the grade level of the students, both grades show a higher percentage of correct answers in one type of problem than in the other, thus accepting the null hypothesis.

On the other hand, as an effect of the test between subjects, there was no effect between the factors degree and types of problems $F(.411)$, $p=0.53$. That is, the grade does not affect performance on either type of problem. The analysis of variance does not reveal any significant interaction.

Figure 1 shows the lack of interaction between problem type and grade, both perform better in answering problems of the comparison of reasons type and lower in solving problems of the relative thinking type, fourth graders are slightly above correct answers relative to fifth graders.

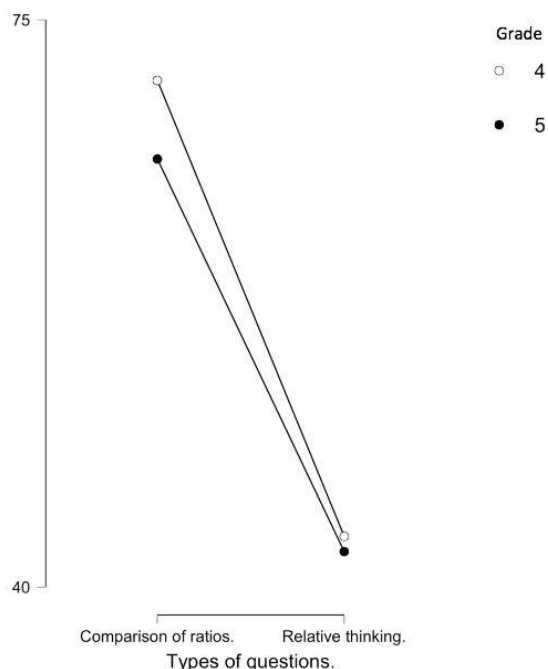


Figure 1: Comparative chart between the results of two types of problems in two school grades.

The results of the statistical test indicated that if there are differences between students' responses to the two types of problems, both problems show very large differences in student responses, even though proportional reasoning is at play in both.

It is believed that problems of the Relative Thinking kind present a greater level of difficulty to students because, as reported by Lamon (1993), students are more familiar with *using* additive structures and when facing situations that involve the use of multiplicative structures, they cannot perceive the multiplicative nature of situations involving ratio and proportion. Unlike problems of the comparison of ratios, it is not necessary to give meaning to any quantity, "in these problems the notion of ratio is the very object of the question, by means of a certain quality: which orange tastes more like orange? Which vehicle goes faster?" (Block, Mendoza and Ramírez, 2010, p 67).

It is necessary to provide students with opportunities to develop relative thinking, to create contexts in classrooms to encourage multiplicative thinking while giving meaning to the notion of ratio, and to find the value of ratio where necessary.

Future research should seek to link students' relative thinking and their understanding of ratio and proportion. It is essential that bridges be built between these two issues related to proportional thinking, so that it can contribute to the creation of new educational programs that favor understanding in proportionality. Work must also be done on the training of teachers, who face various challenges in teaching proportional reasoning (Hilton and Hilton, 2018).

References

- Block, D., Mendoza, T., Ramírez, M. (2010). ¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. Ciudad de México: *Ediciones SM*, pp. 67-80.
- Boyer, Ty., Levine, S., y Hutterlocher, J. (2008). Where Young Children Go Wrong. *American Psychological Association*, 5, pp. 1478-1487. DOI:10.1037/a0013110.
- Fischbein, E., Pampu, I., and Ion Mânzat (1970). Comparison of Ratios and the Chance Concept in Children. *Wiley on behalf of the Society for Research in Child Development*, 2, pp. 377-389. Retrieve from <http://www.jstor.org/stable/1127038>
- Hilton, A., Hilton, G. (2018). Primary school teachers implementing mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *J Math Teacher Education*, 22, 545-570. DOI.org/10.1007/s10857-018-9405-7.
- Lamon, S. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal of Research of Mathematical Education*, 24(1). pp. 58-60. Retrieve from http://www.jstor.org/stable/749385?seq=1&cid=pdf-reference_tab_contents
- Lamon, S. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. *EEUU: Eribaum*; pp. 11-19.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I-differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 2, pp. 217-253. Retrieve from <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00304357>
- Singh, P. (2001). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, 43, pp.271-292. Retrieve from <https://link.springer.com/article/10.1023/A%3A1011976904850>
- Pierce, J. (2008). Generating stimuli for neuroscience using Psychopy. *Frontiers in Neuroinformatics*, 2(10), 1-9. Doi:10.3389/neuro.11.010.2008
- Sax, A., Slusser, Bart. (2019). Spontaneous partitioning and proportion estimation in children's numerical judgments. *Journal of Experimental Child Psychology*, 185, pp. 71-80. doi.org/10.1016/j.jecp.2019.04.00
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, pp. 197-223.
-

EL PENSAMIENTO PROPORCIONAL: UN ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE NIÑOS DE CUARTO Y QUINTO DE PRIMARIA

PROPORTIONAL THINKING: A COMPARATIVE STUDY AMONG FOURTH AND FIFTH GRADE CHILDREN

Mike Saldaña Guerrero

Cinvestav

mike.saldana@cinvestav.mx

Sofía K. Vázquez Gómez

Cinvestav

sofia.vazquez@cinvestav.mx

El tema de la proporcionalidad se inicia formalmente en los últimos años de la escuela primaria, implica el dominio de nociones, como la comparación de razones, fracciones y porcentajes. En esta investigación se realizó un estudio con 18 alumnos de cuarto y quinto grado de educación primaria con una edad entre los 9 a 13 años, con el objetivo de evaluar su desempeño al resolver problemas que implicaron comparar razones y tener un pensamiento relativo. Ambos tipos de problemas conllevan tener un pensamiento proporcional. El propósito es conocer cuál es la diferencia entre los dos grupos, así como identificar si existe diferencia entre la ejecución en los dos tipos de problemas. Se encontró que los alumnos de ambos grados presentan más dificultad al resolver los problemas del tipo pensamiento relativo y que no hay una diferencia sustancial entre los dos grupos que participaron.

Palabras clave: Resolución de problemas, razonamiento y demostraciones

En las investigaciones dirigidas a estudiar el razonamiento proporcional en los niños que asisten a la primaria, se reconoce la dificultad que enfrentan ante la resolución de problemas que implican operar con nociones como razón, fracción y el desarrollo del pensamiento relativo.

En este reporte se presentan los resultados de un estudio realizado con niños de 4° y 5° grado de primaria a través de un software informático en el que se plantearon dos tipos de problemas que para su resolución requería el uso de comparación de razones y del pensamiento relativo.

Antecedentes y marco teórico

Entre los estudios que focalizan la comparación de razones, Fishbein, Pampu, y Manzat, (1970) investigaron acerca de la influencia del número total de canicas, en cualquier conjunto, al comparar razones entre conjuntos, señalando la posibilidad de estimar utilizando razones del tipo W_1/B_1 y W_2/B_2 . Sing (2001), con base en estudios con alumnos de sexto grado sobre la comprensión de conceptos de proporción y razón al resolver problemas como la compra de dulces, reparto de pizzas y una situación de ampliar y reducir un rectángulo, enfatiza que se necesita tener construidas estructuras multiplicativas y esquemas de iteración para el pensamiento proporcional. Boyer, Levine, y Huttenlocher (2008), realizaron dos estudios mediante el uso de programas de computadora, basados en la aplicación de una tarea de equivalencia proporcional. Examinaron dónde se equivocan los estudiantes al procesar proporciones que implican cantidades discretas.

La interpretación de los resultados de este estudio, se realiza en el marco de los siguientes planteamientos teóricos. Vergnaud (1991), menciona que en el curso de los primeros años de la escuela primaria se hacen las primeras adquisiciones de las estructuras numéricas: las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas. La adición está asociada con situaciones de agrupamiento, que posibilitan a través de situaciones dirigidas conocer las reglas y procedimientos de las estructuras aditivas, necesarias para la adquisición de las estructuras multiplicativas. Respecto a la multiplicación, establece que la primera gran forma de una relación multiplicativa, implica establecer una relación entre dos cantidades del mismo tipo con otras dos del mismo tipo, es decir, hay cuatro cantidades puestas en relación.

En la multiplicación se requiere de la comprensión de funciones que asumen las cantidades implicadas, nociones tales como operador escalar, operador fraccionario, valor unitario, etc., Vergnaud (1991). De acuerdo a este planteamiento se da la posibilidad de que las relaciones y representaciones entre cantidades se escriban en forma de proporciones y se arribe a la noción de fracción, de razón y en consecuencia a la comparación de razones. Por otra parte, Lamon (1999), define dos tipos de pensamiento en el campo de la proporcionalidad: pensamiento relativo, en el que la comparación entre dos cantidades se hace de una respecto a la otra y no de manera independiente que es lo que caracteriza al pensamiento aditivo. Noelting (1980), con base en su experimento de comparar mezclas de jugo de naranja y agua, estableció una diferenciación jerárquica de etapas de desarrollo del razonamiento proporcional, basándose en la comparación de razones.

Preguntas de investigación, objetivos y método

Objetivo General:

Evaluar si existe diferencia entre los alumnos de cuarto y quinto grado de primaria en cuanto a su desempeño en dos tipos de problemas que implican reconocer las relaciones de proporcionalidad y tener un pensamiento relativo.

Objetivos específicos:

Reconocer qué diferencia existe entre los resultados de los problemas de comparación de razones con respecto a los problemas de pensamiento relativo.

Observar qué diferencia hay entre los resultados de los alumnos de cuarto grado de primaria con respecto a los alumnos de quinto grado de primaria.

Preguntas de investigación:

¿Qué diferencia existe entre los resultados de los problemas de comparación de razones con respecto a los problemas de pensamiento relativo?

¿Qué diferencia existe entre los resultados de los alumnos de cuarto grado de primaria con respecto a los alumnos de quinto grado de primaria?

Hipótesis

H₀= No hay diferencia en los resultados entre los problemas de comparación de razones y los problemas de pensamiento relativo.

H₁= Existe diferencia en los resultados entre los problemas de comparación de razones y los problemas de pensamiento relativo.

H₀= No hay diferencia en las respuestas de los alumnos de 4° grado respecto a las de los alumnos de 5° grado.

H₁= Existe diferencia en las respuestas de los alumnos de 4° grado respecto a las de los alumnos de 5° grado.

Un total de 18 alumnos participaron en esta investigación, 10 niños de cuarto grado y 8 niños de quinto grado de educación primaria de una escuela privada de la Ciudad de México.. Los participantes cuentan con una edad comprendida entre los 9 a 13 años de edad, con una media de 10.17 años y una desviación estándar de 0.89.

Se diseñó un programa en el software PsychoPy versión v.3.2.3. El programa que se realizó en PsychoPy, es el instrumento que permitió obtener los datos en la presente investigación, se conformó de tres partes generales, la primera de ellas presentó a los estudiantes las instrucciones de la actividad, en la siguiente parte del instrumento se presentaron a los estudiantes ocho problemas del tipo comparación de razones, se tomaron como modelo las actividades realizadas por Noelting (1980), en la tercera parte del instrumento se proponen ocho problemas en la categoría pensamiento relativo, se tuvieron en cuenta algunas actividades realizadas por Lamon (1999), referentes al

pensamiento relativo y absoluto y otros se adaptaron. Para la implementación la institución brindó el acceso al aula de cómputo y la prueba se hizo dos veces a cada estudiante, cuando los niños llegaban al aula se les informaba que era una investigación que se estaba realizando para una universidad y que no era para calificarlos.

Resultados y discusión.

El procedimiento implementado para evaluar las respuestas fue calcular el porcentaje de respuestas correctas por alumno del primer momento, posteriormente calcular el porcentaje de respuestas correctas por alumno en el segundo momento para finalmente calcular la media del momento uno y dos.

Con la media de los momentos uno y dos de los estudiantes se realizó un análisis de varianza (ANOVA) de medidas repetidas (grado escolar: quinto de primaria vs. cuarto de primaria) X2 (Tipos de problemas: Comparación de razones vs Pensamiento relativo) en el programa estadístico llamado Jasp. El grado escolar se define como la variable inter-sujeto y la variable tipo de problema se define como la variable intra-sujeto.

Para el efecto principal con respecto a los tipos de problemas, dentro de sujetos, se reporta un estadístico grande de $F(49.201)$, ($0.001 < p$), se puede decir que sin considerar el grupo que respondió el instrumento hay diferencias significativas respecto a los dos tipos de problemas presentados, los problemas de comparación de razones con respecto a los problemas de pensamiento relativo. Es decir, los alumnos de ambos cursos responden mejor los problemas de comparación de razones que los de pensamiento relativo, de esta manera se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa que menciona que si existe diferencia entre ambos tipos de problemas.

Por otra parte, otro efecto dentro de sujetos en relación con los dos grados escolares se reporta un estadístico $F(0.274)$, ($p = 0.608$) esto indica que no existe diferencia entre los dos grupos que respondieron el instrumento. La prueba ANOVA sugiere que en este caso sin tomar en cuenta el grado escolar que cursen los alumnos, ambos grados muestran tener un porcentaje mayor de respuestas correctas en un tipo de problema que en el otro, aceptando así la hipótesis nula.

Por otro lado, como efecto de la prueba entre sujetos, no hubo efectos entre los factores grado y tipos de problemas $F(.411)$, $p = 0.53$. Es decir, el grado escolar no afecta el rendimiento en ninguno de los dos tipos de problemas. El análisis de varianza no revela alguna interacción significativa.

La figura 1 muestra la falta de interacción entre el tipo de problema y el grado, ambos tienen un mejor rendimiento al responder problemas del tipo comparación de razones y un rendimiento más bajo al resolver problemas del tipo de pensamiento relativo, los alumnos de cuarto grado están ligeramente por encima con respecto a las respuestas correctas en relación con los alumnos de quinto grado.

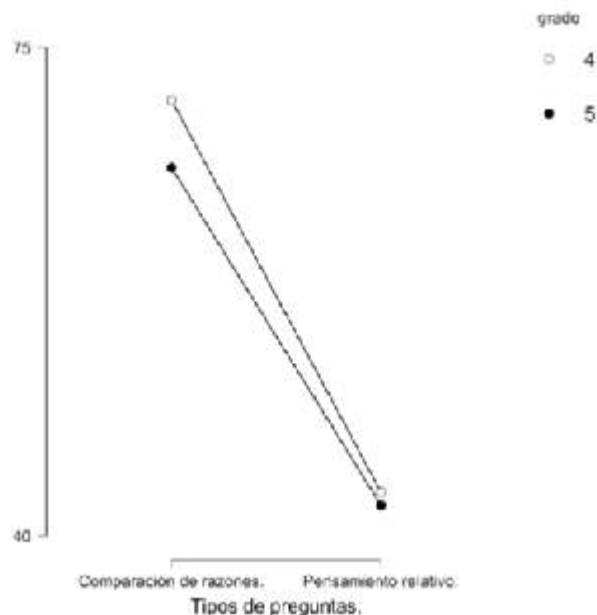


Figure 1: Gráfica comparativa entre los resultados de dos tipos de problemas en dos grados escolares.

Los resultados de la prueba estadística realizada indicaron que si hay diferencias entre las respuestas de los alumnos de los dos tipos de problemas, ambos problemas muestran diferencias muy grandes en las respuestas de los estudiantes, aunque el razonamiento proporcional está en juego en ambos.

Se cree que los problemas del tipo Pensamiento Relativo presentan un nivel de dificultad mayor a los estudiantes debido a que como reporta Lamon (1993), los estudiantes están más familiarizados con utilizar estructuras aditivas y al enfrentar situaciones que implican el uso de estructuras multiplicativas, ellos no pueden percibir la naturaleza multiplicativa de las situaciones que implican la razón y proporción, a diferencia de los problemas de tipo comparación de razones, en los que no es necesario dar significado a ninguna cantidad, “en estos problemas la noción de razón es el objeto mismo de la pregunta, mediante determinada cualidad: ¿qué naranjada sabe más a naranja? ¿Qué vehículo va más rápido?” (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, p 67).

Es necesario brindar a los estudiantes oportunidades para desarrollar un pensamiento relativo, crear contextos en las aulas de clase para incitar el pensamiento multiplicativo a la par de dar significado a la noción de razón y encontrar el valor de la razón en los casos en los que sea necesario.

Futuras investigaciones deben buscar vincular el pensamiento relativo de los estudiantes y su comprensión de la razón y la proporción. Es indispensable que se construyan puentes entre estos dos temas relacionados al pensamiento proporcional, de modo que se pueda contribuir a la creación de nuevos programas educativos que favorezcan la comprensión en la proporcionalidad. También se debe trabajar en la capacitación de los profesores, los cuales enfrentan varios desafíos en la enseñanza del razonamiento proporcional (Hilton y Hilton, 2018).

References.

- Block, D., Mendoza, T., Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Ciudad de México: Ediciones SM, pp. 67-80
- Boyer, Ty., Levine, S., y Huttenlocher, J., (2008). Where Young Children Go Wrong. *American Psychological Association*, 5, pp. 1478-1487. DOI: 10.1037/a0013110.
- Fischbein, E., Pampu, I., and Ion Mánzat (1970). Comparison of Ratios and the Chance Concept in Children. *Wiley on behalf of the Society for Research in Child Development* , 2, pp. 377-389. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/1127038>.

- Hilton, A., Hilton, G. (2018). Primary school teachers implementing mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *J Math Teacher Education*, 22, 545-570. doi.org/10.1007/s10857-018-9405-7
- Lamon, S. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal of Research of Mathematical Education*, 24(1). pp. 58-60. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/749385?seq=1&cid=pdf-reference#references_tab_contents
- Lamon, S. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. EEUU: Eribaum; pp. 11-19.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I-differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 2, pp. 217-253. Recuperado de <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00304357>
- Singh, P. (2001). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, 43, pp. 271-292. Recuperado de <https://link.springer.com/article/10.1023/A%3A1011976904850>
- Pierce, J. (2008). Generating stimuli for neuroscience using Psychopy. *Frontiers in Neuroinformatics*, 2(10), 1-9. doi:10.3389/neuro.11.010.2008
- Sax, A., Slusser, Bart. (2019). Spontaneous partitioning and proportion estimation in children's numerical judgments. *Journal of Experimental Child Psychology*, 185, pp. 71-80. doi.org/10.1016/j.jecp.2019.04.004
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, pp. 197-223