SPATIAL IMAGINATION TO WORK ON 3D SPACE USING A FIGURAL DEVICE

IMAGINACIÓN ESPACIAL PARA TRABAJAR OBJETOS EN EL ESPACIO 3D USANDO UN DISPOSITIVO FIGURAL

Beatriz Alejandra Veloz Díaz
CINVESTAV-IPN
Betty.vdiaz@gmail.com

Claudia Margarita Acuña Soto
CINVESTAV-IPN
Claudiamargarita_as@hotmail.com

Currently, the spatial imagination is not explicitly developed in schools, it will be necessary to interpret 3D objects that are represented in 2D. To develop the ability of 3D spatial imagination, it is necessary to consider the spatial location and relative position between objects. Relating sets of points with appropriate variations of triads of type (x, y, z) promotes this ability. In this ongoing research, the numerical variation of the entries associated with the graphic objects provides indicators of location and relative position of points, lines or planes to high school students. We find selective numerical variation, supports the development of spatial imagination, whose repeated use will train a habit in orientation, which must be worked to become transparent.

Keywords: Geometry and Geometrical and Spatial Thinking

According to research related to the analysis of syllabus and textbooks of middle and higher education, for the study of topics such as vector spaces, an explicit introduction to the development of spatial imagination is not considered necessary, which then is a disadvantage in graphic interpretations. However, in these syllabus there is a graphic approach that tries to be solved through the graphic point-ordered pair relationship, which does not seem to be sufficient for the type of tasks proposed. At the same time, 3D representations are scarce and the problems associated with interpretation are not addressed because they are used as an illustration and not as a mathematical object; due to that situation, students do not have the opportunity to go beyond a formal education that emphasizes algebraic treatment, because they do not have graphical representations (Van Dormolen, 1986).

On the other hand, students show a natural propensity to identify more easily some directions over others in tasks of graphic interpretation in the case of graphs in representations of 3D spaces, which contributes to disorienting the student in tasks of spatial imagination (Cohen , 2001). Other sources of conflict arise in the interpretation of perspective, due, among other things, to the fact that we must reorganize the information to understand that this interpretation is present and that the graphic representation is subordinate to it, that is, "seeing and knowing" are two different things, according to Parzysz (1988). Preference to identify lines or sets of lines in a general way can also be an obstacle if there is not a direct instruction to determine their orientation (Bakó, 2003).

Because the interpretation of the perspective or 3D depth in a plane is a work in which the visual information must be decoded, from our point of view it is necessary to have indicators that guide the spatial imagination to carry out an adequate treatment of 3D graphic objects.

Some learning proposals to work with 3D space, link the figural properties of drawing with its mathematical characteristics through the use of orthogonal projections, which have a constructive and prescriptive foundation, that is organized through parallelism and perpendicularity (Parzysz , 1988), and goes in the direction of establishing spatial indicators for students to improve their spatial imagination. Therefore, we consider it of great importance to provide such indicators that guide students for the interpretation of 3D space in terms of locating the position of points as well as sets of points in their relative positions.

Theoretical framework

In learning mathematics, the use of signs as semiotic instruments (Vigotsky, 1981a) that allow knowledge to be mediated, provides adequate conditions for students to develop reflective practice (Radford, 2006, 2012); therefore, it is important to associate mathematical ideas such as graphics, in terms of a practice that uses semiotic instruments, particularly when we establish relationships between algebraic objects and graphics, to integrate the interpretation of 3D graphics into a single body of knowledge, as in this case.

On the other hand, mathematical objects such as graphs, have a visual and abstract character, so it can be considered as a figural concept (Fischbein, 1993), mathematical objects that can be thought of in a double status, as objects and as concepts. In particular, geometric objects are figural concepts, since they reflect spatial properties (shape, position, magnitude) and at the same time, they possess conceptual qualities such as ideality, abstraction, generality, perfection, among others (Fischbein, 1993), and apparently this is also the case for graphs.

Because the figural properties are ostensive, that is "they are in front of the eyes", they allow us to differentiate their location and their relative position, in addition to the fact that their position is the only property of graphic objects, because they are represented in homogeneous spaces of representation where the only quality is their position (Nemirovsky, 2001). We are able to lean on these properties to develop spatial imagination, which in our case includes both, the ability to locate points, as well as the ability to establish the relative position between graphic objects that include points, lines and planes.

In order to establish spatial indicators for the spatial imagination, we will be using a treatment on the position of points of the type (x, y, z) which by means of the numerical variation of their coordinates, describes points and sets of associated points as points, lines and planes, which depending on the situation take on the role of spatial indicators. Used in this way, the triads become signs that associate properties of algebraic description and spatial position, which makes them what we have named, a figural device, when used for this dual purpose. Besides that, due to its perceptual nature, its repeated use would allow students to develop habits of thought (Cuoco, Goldenberg and Mark, 1996) until they acquire a form of transparency (Roth, 2003) in their location and relative position.

Next, we propose what are our research hypotheses:

1. The spatial imagination can be developed by positional approximations by means of the numerical variation of the triad (x, y, z) associated with the points that can describe lines and planes, as well as the hability to establish their relative position.
2. The acquisition of habits of thought plays a central role in the acquisition of the ability of spatial imagination, if the variation of the triads is associated with the position of the objects described.

Methodology

In particular, in the case of visual interpretation of three-dimensional space, it is possible to make use of certain types of figural devices when we use the triad (x, y, z) that has its origin in the representation of points in three-dimensional spaces. Based on their position properties, we explore the relationship between each coordinate of the triad (x, y, z) and those of the points in space.

The activity carried out establishes that each of the coordinates refers to a specific orientation in space, which makes it possible to make constant some of the values of the coordinates to vary one or two of them or to vary all three. This allows the coordinate to be associated with the relative position of the points and point sets, using the axes as an orientation reference.

We proceeded with two different environments for locating points and sets of points. On the one hand, in a physical environment we made use of a manipulable (Godino, 1998) for the realistic representation of the 3D space, where we used a model consisting of three slightly transparent plastic sheets, of different colors, assembled in such a way that they represented the eight octants, and the joints of each sheet formed the axes of space. For the second environment, graphical representations were used in GeoGebra.

The developed procedure was based on establishing a location relationship supported by the numerical variation in the triad coordinates (x, y, z), asking for the point or set of points that were described from the variations made and the coordinates with constant values in the two environments.

Implementation

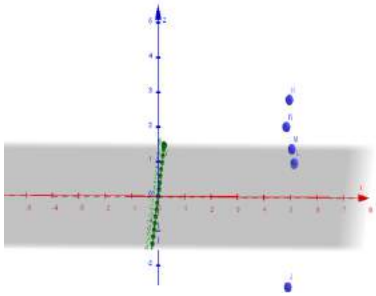
The implementation of this research was carried out in two groups of the sixth semester of high school: group A, consisted of 20 students and group B, consisted of 36, all of them 17 and 18 years old and none of them with a notion of 3D space. They were given a class where they were introduced to three-dimensional space, explaining concepts and placing triads in different octants. After this, we did a case study with the student Elías from group B, and we did a follow-up interview that we describe below.

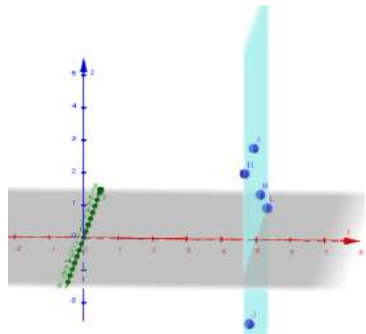
First phase: physical model and location of areas associated with the signs. It was a reminder of the positional meaning that the triad can acquire, as in cases where the points have the following signs: a) (±, -, ±) b) (+, +, +) c) (+, - , ±) d) (-, +, ±) e) (+, ±, ±) f) (-, -, -). The work was accompanied by the comparison of the location of the triad that Elías made first in his worksheets, varying the possibilities of orientation depending on the signs. He was also asked for suggestions on points with specific properties.

Second approach: Variations. The researchers proceeded to make variations, first, we set a coordinate allowing the variation in the two remaining positions, so that the sets of points described formed planes to reflect on the properties of the lines formed by the intersections of parallel and perpendicular planes at this stage, particularly with the canonical planes. Then we set a pair of coordinates allowing the variation of the missing position, so that the sets of points described now formed lines, parallel to one of the axes, as in the cases of (-1, 2, z), (1, y, 3) or (x, 2, -1), among others; the sets were located in the space provided by GeoGebra.

We present an extract from the interview with Elías, that allowed the researchers to see the use of the triad as a figural concept in the case of the variation of two coordinates with the other one fixed; we asked him to mention 5 triads in which the first coordinate had the same value and the second and third varied, those points were graphed in the software (Figure 1) and he was asked:

INV: What do you observe about these points? (Figure 1)
Elías: Now they are all facing each other.
INV: Would they be on some plane? Would all the points be inside this? (indicates the region of the points)
Elías: From the plane? Yes.
INV: What plane would it be?
Elías: It would be (5, y, z)
After Elías said (5, y, z), the plane was graphed as in Figure 2 to verify:





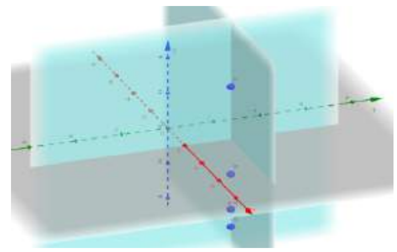


Figure 1: Graphed points **Figure 2: Plane (5, y, z)** **Figure 3: Planes (2, y, z) y (x, 2, z)**

Subsequently, the student was asked to mention four triads in which the first and second coordinates were fixed and the third varied, those points were graphed in GeoGebra and Elías was able to visualize that they were "on top of each other", that is "there is only one line left" and there could be two planes - (2, y, z) and (x, 2, z) - that could go through that line (Figure 3).

Results.

In the group stage of the experiment, students were able to have a first adequate approach to three-dimensional space, this was observed qualitatively from the variational management they gave to triads with different signs, placing them correctly in one of the eight octants of space, and by making sense of the "new" axis, the Z axis. In addition, although the manipulative was only used at the beginning to determine the orientation and the octants, in the interview the student Elías used it and expressed that this model made it easier for him to locate the triads, that is, it allowed him to better organize his thoughts. We saw this reflected at different times: when he identified each graphed plane and related them to their corresponding triads; when he was asked to mention five triads where only the first one was fixed and the other two varied, managing to visualize the plane in which they were located; and finally, when he chose different triads, with the first two coordinates fixed and varying the third, to visualize the intersection of two planes that form in them, and these, in their role as a figural device led him to also identify the line generated with those triads. Achieving an approximation to the transparency of the particularly chosen triads.

References

Bakó, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial geometry. *Proceedings of the Third Conference of the European society for Research in Mathematics Education*. Thematic group, 7.

Cohen, N. (2001). Preference of directions in 3-D space. In *PME CONFERENCE*, (Vol. 1, pp. 1-298).

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(4), 375-402.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Godino, J. (1998). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. *Actas do ProfMat*, *98*, 117-124.

Nemirovsky, R., & Tierney, C. (2001). Children creating ways to represent changing situations: On the development of homogeneous spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *45*(1), 67-102.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, *19*(1), 79-92.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, Número especial, 103-129.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* Número especial, 7-21.

Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.). *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* 283-288.

Roth, W. M. (2003). Competent workplace mathematics: how signs become transparent in use. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*, 161–189.
Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. *In Perspectives on mathematics education*, 141-171.
Vygotsky, L. S. (1981a). The instrumental method in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.), The concept of activity in Soviet psychology, 135-143.

IMAGINACIÓN ESPACIAL PARA TRABAJAR OBJETOS EN EL ESPACIO 3D USANDO UN DISPOSITIVO FIGURAL

SPATIAL IMAGINATION TO WORK ON 3D SPACE USING A FIGURAL DEVICE

Beatriz Alejandra Veloz Díaz
CINVESTAV-IPN
Betty.vdiaz@gmail.com

Claudia Margarita Acuña Soto
CINVESTAV-IPN
Claudiamargarita_as@hotmail.com

Actualmente en las escuelas no se desarrolla explícitamente la imaginación espacial, esta será necesaria para interpretar objetos 3D que se representan en 2D. Para desarrollar la habilidad de la imaginación espacial en 3D es necesario considerar la ubicación espacial y la posición relativa entre objetos. Relacionar conjuntos de puntos con variaciones adecuadas de triadas del tipo (x, y, z) promueve esta habilidad. En esta investigación en curso, la variación numérica de las entradas asociadas a los objetos gráficos proporciona indicadores de ubicación y posición relativa de puntos, rectas o planos a los estudiantes de bachillerato. Encontramos que la variación numérica selectiva apoya el desarrollo de la imaginación espacial, cuyo uso reiterado tiende a formar un hábito en la orientación, el que debe ser trabajado para convertirse en transparente.

Palabras clave: Geometría y Pensamiento Geométrico y Espacial

De acuerdo con investigaciones relacionadas con el análisis de programas de estudio y libros de texto de nivel medio superior y superior, para el estudio de temas como el relativo a los espacios vectoriales no se considera necesaria una introducción explícita al desarrollo de la imaginación espacial, lo que luego es una desventaja en la interpretación gráfica. Sin embargo, en dichos programas hay un enfoque gráfico que pretende ser resuelto a través de la relación punto gráfico-pareja ordenada, que no parece ser suficiente para el tipo de tareas que se proponen. Al mismo tiempo las representaciones 3D son escasas y no se atienden las problemáticas asociadas a la interpretación porque son usadas como una ilustración y no como un objeto matemático, por lo que los estudiantes no tienen oportunidad de ir más allá de una educación formalista que enfatiza el tratamiento algebraico, debido a que no cuentan con representaciones gráficas (Van Dormolen, 1986).

Por otro lado, los estudiantes manifiestan una propensión natural a identificar con más facilidad unas direcciones sobre otras en tareas de la interpretación gráfica en el caso de gráficas en representaciones de espacios 3D, lo que contribuye a desorientar al estudiante en tareas de imaginación espacial (Cohen, 2001). Otras fuentes de conflicto se presentan en la interpretación de la perspectiva debido, entre otras cosas, a que debemos reorganizar la información para entender que esta interpretación está presente y que la representación gráfica se supedita a ella, es decir “ver y saber” son dos cosas distintas al decir de Parzysz (1988). También puede ser un obstáculo la preferencia para identificar unas rectas o conjuntos de ellas de manera general si no hay una instrucción ex profeso para determinar su orientación (Bakó, 2003).

De manera que la interpretación de la perspectiva o profundidad 3D en un plano es un trabajo en el que se debe decodificar la información visual, desde nuestro punto de vista es necesario contar con indicadores que orienten la imaginación espacial para llevar a cabo un tratamiento adecuado de los objetos gráficos en 3D.

Algunas propuestas de aprendizaje para trabajar con el espacio 3D ligan las propiedades figurales del dibujo con sus características matemáticas a través del uso de proyecciones ortogonales, las cuales tienen un fundamento constructivo y prescriptivo, el que es organizado a través del paralelismo y la perpendicularidad (Parzysz, 1988), lo que avanza en la dirección de establecer indicadores espaciales a los estudiantes para mejorar su imaginación espacial. Por ello, consideramos de gran importancia proporcionar dichos indicadores que orienten a los estudiantes para la interpretación del espacio 3D en términos de ubicar la posición de puntos así como de conjuntos de ellos en sus posiciones relativas.

Marco Teórico

En el aprendizaje de la matemática, el uso de los signos como instrumentos semióticos (Vigotsky, 1981a) que permitan mediar el conocimiento proporciona condiciones adecuadas para que los estudiantes desarrollen una práctica reflexiva (Radford, 2006, 2012); por ello, es importante asociar las ideas matemáticas como la gráfica en términos de una práctica que hace uso de instrumentos semióticos, en particular cuando establecemos relaciones entre los objetos algebraicos y los gráficos para integrar en un solo cuerpo de conocimiento la interpretación de la gráfica 3D, como en el caso que nos ocupa.

Por otro lado, los objetos matemáticos como la gráfica tienen un carácter visual y abstracto, por lo que puede ser considerada como un concepto figural (Fischbein, 1993), objetos matemáticos que pueden ser pensados en un doble estatus, como objetos y como conceptos. En particular, los objetos geométricos son conceptos figurales, ya que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, magnitud) y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales como idealidad, abstracción, generalidad, perfección, entre otras (Fischbein, 1993), y al parecer este también es el caso de las gráficas.

En tanto que las propiedades figurales son ostensivas, esto es "están frente a los ojos", nos permiten diferenciar su ubicación y su posición relativa, además de que su posición es la única propiedad de los objetos gráficos, debido a que son representados en espacios de representación homogéneos donde la única cualidad es su posición (Nemirovsky, 2001). Estamos en condiciones de apoyarnos en estas propiedades para desarrollar la imaginación espacial, que en nuestro caso incluye tanto la habilidad para localizar los puntos, así como la de establecer la posición relativa entre objetos gráficos que incluyen puntos, rectas y planos.

Con el objeto de establecer indicadores espaciales para la imaginación espacial, estaremos haciendo uso de un tratamiento sobre la posición de puntos del tipo (x, y, z) que mediante la variación numérica de sus coordenadas nos describen puntos y conjuntos de puntos asociados como puntos, rectas y planos, los cuales según sea la situación toman dicho papel de indicadores espaciales. Usadas así las triadas se transforman en signos que asocian propiedades de descripción algebraica y de posición espacial, lo que las convierte en lo que hemos dado en llamar un dispositivo figural cuando es usado con este doble propósito. Además de que, por su naturaleza perceptual, su uso reiterado permitiría a los estudiantes desarrollar hábitos de pensamiento (Cuoco, Goldenberg y Mark, 1996) hasta adquirir una forma de transparencia (Roth, 2003) en la localización y la posición relativa de ellos.

A continuación, proponemos las que son nuestras hipótesis de investigación:

1. La imaginación espacial puede ser desarrollada por aproximaciones posicionales mediante la variación numérica de la triada (x, y, z) asociada a los puntos que pueden describir rectas y planos, así como pueden establecer su posición relativa.

2. La adquisición de hábitos de pensamiento juega un papel central en la adquisición de la habilidad de imaginación espacial si se asocia la variación de las triadas con la posición de los objetos descritos.

Metodología

En particular, en el caso de la interpretación visual del espacio tridimensional, es posible hacer uso de cierto tipo de dispositivos figurales cuando usamos la triada (x, y, z) que tiene su origen en la representación de los puntos en el espacio tridimensional. Con base en sus propiedades de posición exploramos la relación entre cada coordenada de la triada (x, y, z) y las de los puntos sobre el espacio.

La actividad desarrollada establece que cada una de las coordenadas se refiere a una orientación específica en el espacio, lo que permite hacer constantes algunos de los valores de las coordenadas para variar uno o dos de ellos o variar los tres. Esto permite asociar la coordenada con la posición relativa de los puntos y conjuntos de puntos, usando a los ejes como referencia de orientación.

Procedimos con dos entornos distintos para la localización de puntos y conjuntos de puntos. Por un lado, en un entorno físico hicimos uso de un manipulable (Godino, 1998) para la representación realista del espacio 3D, donde usamos un modelo formado por tres láminas de plástico ligeramente transparente, de diferentes colores, ensambladas de tal forma que representaban los ocho octantes, las uniones de cada lámina formaban los ejes del espacio. Para el segundo entorno se usaron representaciones gráficas en GeoGebra.

El procedimiento desarrollado se basó en establecer una relación de localización apoyada en la variación numérica en las coordenadas de la triada (x, y, z), preguntando por el punto o conjunto de puntos que eran descritos a partir de las variaciones hechas y de las coordenadas con valores constantes en los dos entornos.

Puesta En Marcha.

La puesta en marcha de esta investigación se llevó a cabo en dos grupos de sexto semestre de bachillerato: el grupo A, conformado por 20 estudiantes y el grupo B, conformado por 36, todos ellos de 17 y 18 años y ninguno con noción del espacio 3D. Se les dio una clase donde se les introdujo al espacio tridimensional, explicando conceptos y ubicando triadas en diferentes octantes. Después de esto, hicimos un estudio de caso con el estudiante Elías del grupo B, le hicimos una entrevista de seguimiento que describimos a continuación.

Primera fase: modelo físico y localización de zonas asociadas a los signos. Se trató de un recordatorio del significado posicional que puede adquirir la triada como en los casos en que los puntos tienen los siguientes signos: a) (±, -, ±) b) (+, +, +) c) (+, -, ±) d) (-, +, ±) e) (+, ±, ±) f) (-, -, -). El trabajo se acompañó de la comparación de la ubicación de la triada que Elías hizo primero en sus hojas de trabajo variando las posibilidades de orientación dependiendo de los signos. También se le pidieron sugerencias sobre puntos con propiedades específicas.

Segunda aproximación: Variaciones. Las investigadoras procedimos a hacer variaciones, en primer lugar, fijamos una coordenada permitiendo la variación en las dos posiciones restantes, de manera que los conjuntos de puntos descritos formaron planos para reflexionar en las propiedades de las rectas formadas por los cruces de planos paralelos y perpendiculares en esta etapa, en particular con los planos canónicos. Luego fijamos un par de coordenadas permitiendo la variación de la posición faltante, de manera que los conjuntos de puntos descritos ahora formaron rectas paralelas a alguno de los ejes como en los casos de (-1, 2, z), (1, y, 3) o (x, 2, -1), entre otros; los conjuntos fueron ubicados en el espacio proporcionado por GeoGebra.

Presentamos un extracto de la entrevista con Elías que a las investigadoras nos permitió ver el uso de la triada como concepto figural en el caso de la variación de dos coordenadas con la otra fija; le pedimos que mencionara 5 triadas en las que la primera coordenada tuvieran el mismo valor y la segunda y la tercera variaran, se graficaron esos puntos en el software (Figura 1) y se le preguntó:

INV: ¿Qué observas de estos puntos? (Figura 1)
Elías: Ahora todos están uno frente a otro.
INV: ¿Estarían sobre algún plano? ¿Todos los puntos estarían adentro de esto? (señala la región de los puntos)
Elías: ¿Del plano? Sí.
INV: ¿Qué plano sería?
Elías: Sería (5, y, z)

Luego de que Elías dijo (5, y, z), se graficó el plano como en la Figura 2 para comprobar:

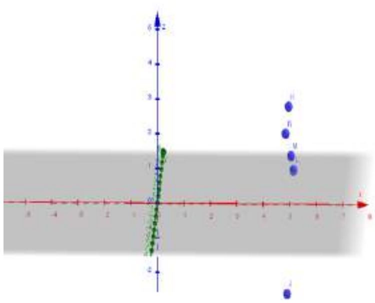


Figura 1: Puntos graficados

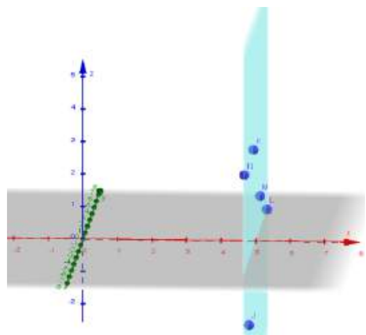


Figura 2: Plano (5, y ,z)

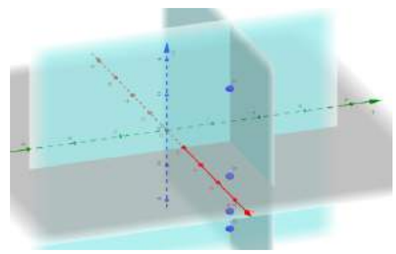


Figura 3: Planos (2, y, z) y (x, 2, z)

Posteriormente, se le pidió al estudiante que mencionara cuatro triadas en las que la primera y la segunda coordenadas fueran fijas y la tercera variara, se graficaron esos puntos en GeoGebra y Elías pudo visualizar que estaban "uno encima del otro", es decir que "queda una línea nada más" y que podrían ser dos planos - (2, y, z) y (x, 2, z) - los que podían pasar por esa línea (Figura 3).

Resultados.

En la etapa grupal del experimento se logró que los estudiantes tuvieran un primer acercamiento adecuado al espacio tridimensional, esto se observó de forma cualitativa a partir del manejo variacional que le daban a las triadas con diferentes signos ubicándolas correctamente en alguno de los ocho octantes del espacio y al darle sentido al "nuevo" eje, el eje Z. Además, aunque el manipulable sólo se usó al inicio para determinar la orientación y los octantes, en la entrevista el estudiante Elías hizo uso de él y expresó que este modelo le facilitaba ubicar las triadas, es decir, le permitía una mejor organización de sus pensamientos. Lo cual vimos reflejado en diferentes momentos: cuando identificó cada plano graficado y los relacionó con sus triadas correspondientes; cuando se le pidió que mencionara cinco triadas donde solo la primera quedara fija y variaran las otras dos, logrando visualizar el plano en el que se encontraban; y finalmente, cuando escogió diferentes triadas con las dos primeras coordenadas fijas y variando la tercera, para visualizar la intersección de dos planos que se forman en ellas, y estos en su papel de dispositivo figural propiciaron que también identificara la recta generada con esas triadas. Logrando una aproximación a la transparencia de las triadas elegidas particularmente.

Referencias

Bakó, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial geometry. *Proceedings of the Third Conference of the European society for Research in Mathematics Education*. Thematic group, 7.

Cohen, N. (2001). Preference of directions in 3-D space. In *PME CONFERENCE*, (Vol. 1, pp. 1-298).

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(4), 375-402.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.
Godino, J. (1998). Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas. *Actas do ProfMat*, *98*, 117-124.
Nemirovsky, R., & Tierney, C. (2001). Children creating ways to represent changing situations: On the development of homogeneous spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *45*(1), 67-102.
Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, *19*(1), 79-92.
Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, Número especial, 103-129.
Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* Número especial, 7-21.
Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.). *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* 283-288.
Roth, W. M. (2003). Competent workplace mathematics: how signs become transparent in use*. International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*, 161–189.
Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. *In Perspectives on mathematics education*, 141-171.
Vygotsky, L. S. (1981a). The instrumental method in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.), The concept of activity in Soviet psychology, 135-143.