CAN CONFIDENCE IN MATHEMATICAL AFIRMATIONSINFLUENCE NEGATIVELY IN THE ADVANCE OF THE DISCIPLINE? WHY?

¿LA CONFIANZA EN AFIRMACIONES MATEMÁTICAS PUEDE INFLUIR NEGATIVAMENTE EN EL AVANCE DE LA DISCIPLINA? ¿POR QUÉ?

Benjamín Martínez-Navarro
Cinvestav
benjaminmartinezn@gmail.com

Mirela Rigo-Lemini
Cinvestav
mrigolemini@gmail.com

The research focuses on the analysis of confidence and doubt in mathematical statements. Based on the Grounded Theory, and on the analysis of a historical case, that of non-Euclidean geometries, and especially on the figure of Saccheri, the question in this document is answered. It is argued that confidence in the truth of Euclidean geometry had as an effect the attribution of qualities to said geometry and to the problems identified in that work. Also, expectations about the solution to those problems and logical, ontological and epistemological commitments were made explicit. It seems that handling these effects of confidence with biases and exaggerations can be negative for the development of mathematical work.

Keyword: Affect, Emotion, Beliefs, and Attitudes; Geometry and Geometrical and Spatial Thinking

Background, objective, and research question

This research focuses on the analysis of states such as the confidence or doubt that people experience around the veracity of mathematical statements (such as postulates, theorems, or results of school assignments, which will be denoted hereinafter as “H”). Rigo (2013) calls these states as “epistemic states of convincement” and represents them as “ESC”. Various studies have shown the presence of these states in all kinds of mathematical practice, both those carried out in school contexts and in professional mathematics (Fischbein, 1982; Harel and Sowder, 1998; Hersh, 1993; Segal, 2000).

In some cases, the security in certain H’s adequately guides the mathematical work, which leads to advances in learning. For example, Inglis, Mejia-Ramos and Simpson (2007) affirm that a considerable reduction in uncertainty allows us to determine when we already have enough tools to carry out a test; the reduction of doubt, works in this case as a force that encourages mathematical activity. In other cases, security can have detrimental effects on the advancement of mathematics learning. For example, in the context of mathematical proofs, Inglis, Mejia-Ramos and Simpson (2007) observed that when a student confidently associated an affirmation based on inductive warrants, he did not have the need later to construct a proof that supported this affirmation.

So, experts have warned that security in mathematical statements can sometimes positively influence the development of learning or disciplinary knowledge, but sometimes that influence can be negative. However, in mathematical education literature -and in that of other disciplinary areas- no systematic conceptual development has been found on the characteristics of this confidence in mathematical statements that account for co-related phenomena, nor, in particular, have they constructed theoretical explanations that allow identifying and understanding the conditions under which the ESC act favorably or unfavorably, at a didactic level. It is considered that it would be necessary to know these conditions in depth, to recreate or inhibit them in school contexts.

To meet these needs, this document suggests a first and provisional answer, based on theoretical explanations, to the question: Why does confidence in mathematical statementsnegatively influence the advancement of the discipline?

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Methodology and methods

The research question posed in the writing demands theoretical explanations associated with the phenomenon of convincement, which go beyond specific descriptions with little clarifying power. However, as already stated, no theories have been constructed that offer such explanations. For this reason, this document does not start from a theoretical framework (it simply does not exist) and its objective is to initiate the development of one. To develop this theory, the qualitative research perspective offered by the Grounded Theory was chosen (GT, Corbin & Strauss, 2015). An analytical tool of GT is "context analysis" (CA). In CA, it is considered that when people act or have some internal experience, they are responding to significant events. Those events are called "conditions". From a fusion of conditions, and from the internal actions or experiences that they promote, results usually emerge. In CA these results are called "consequences". Those consequences can stimulate more actions or change their course. The theory thus consists of a set of explanations on how certain actions or internal experiences can be given under a combination of certain conditions, and how certain consequences can arise from these conditions and actions or internal experiences.

This manuscript provides some explanations regarding the ESC phenomena that people experience when doing mathematical work. For this, following the GT, the CA will be used. But here the focus is only on the analysis of the consequences that these ESC have on mathematical work. For this analysis, historical data can be used, which is taken as empirical data (cf. Corbin & Strauss, 2015). This paper analyzes Saccheri's role in the development of non-Euclidean geometries - who is sadly famous for "being a victim of the preconceived notion of his time, that the only possible geometry was Euclidean" (Heath, 1956, p. 211) -, because it illustrates the phenomenon under study. In particular, parts of Saccheri's preface to his work *Euclid vindicated from every blemish* (Saccheri, 2014) are analyzed, because there he explains his ESC and suggest how these ESC negatively influenced his mathematical work. Following the CA, in the analysis the ESC are considered as internal experiences and the consequences of those ESC are identified. Subsequently, these consequences are denoted with concepts and, in the end, those concepts are used to explain how the ESC influenced (at the beginning) the mathematical work of Saccheri.

Report of results: certainty as an obstacle to the advancement of knowledge

Saccheri begins the preface to his work Euclid vindicated from every blemish with the following:

> Of all who have learned mathematics, none can fail to know how great is the excellence and worth of Euclid's *Elements*. As erudite witnesses here I summon Archimedes, Apollonius, Theodosius, and others almost innumerable, writers on mathematics even to our times, who use Euclid's *Elements* as foundation long established and wholly unshaken. (Saccheri, 2014, p. 62)

There, the mathematician begins by attributing to Euclid's *Elements* a positive quality (of "excellence") magnified (with the word "great"). Later, he supports the attribution of that quality in the ESC of "wholly unshaken" that various mathematical authorities attributed to the work over a long time. Saccheri (2014) thus continues:

> But this so great celebrity has not prevented many, ancients as well as moderns, and among them distinguished geometers, maintaining they had found certain blemishes in these most beauteous nor ever sufficiently praised *Elements*. Three such flecks they designate. (p. 62)

The attribution of magnified positive qualities to the Euclidean work, according to Saccheri, did not prevent mathematicians from identifying blemishes in it. However, the mathematician appealed to these magnified positive qualities, to interpret these imperfections as minimal negative qualities of the work (i.e. flecks). What consequences arose from this attribution of qualities to the Euclidean work and its imperfections? Saccheri continues:

> The first (fleck) pertains to the definition of parallels and with it the Axiom which in Clavius is the thirteenth of the First Book of the *Elements*, where Euclid says: If a straight line falling on two straight lines, lying in the same plane, make with them two internal angles toward the same parts less than two right angles, these two straight lines infinitely produced toward those parts will meet each other. No one doubts the truth of this Assertion; but solely they accuse Euclid as to it, because he has used for it the name Axiom, as if obviously from the right understanding of its terms alone came conviction. (Saccheri, 2014, p. 62)

There, Saccheri begins by announcing that an imperfection (described by him as "fleck") of the Euclidean work is related to the V Postulate. Then he states that postulate and connects it with an ESC: “No one doubts the truth of this Assertion”. So, for Saccheri, the Fifth Postulate's high degree of commitment to truth value was never questioned. For him, the imperfection was that this statement was given the status of axiom. That is, what he questioned was the strategy used to grant the truth value to the V Postulate. In sum, a first consequence of having attributed magnified positive qualities to the Euclidean work and of having interpreted its imperfections as minimal negative qualities was that, despite finding difficulties in one of its affirmations (the V Postulate), the truth of this affirmation was sustained with a high degree of commitment and only the strategy on which that truth value was based was questioned. Other consequences are disclosed below:

> For some, and these surely the keenest, endeavor to demonstrate the existence of parallel straight lines as so defined, whence they go up to the proof of the debated Assertion as stated in Euclid’s terms, upon which truly from that *Elements* (with some very few exceptions) all geometry rests. But others (not without gross sin against rigorous logic) assume such parallel straight lines, forsooth equidistant, as if given, that thence they may go up to what remains to be proved. (p. 62)

In criticizing the attempts of others to solve the problem of the V Postulate, Saccheri explains his commitment to the Euclidean definition of parallel lines, with the role of the V Postulate as “support of all geometry” or with “rigorous logic”. That Saccheri has made explicit those commitments around the Elements is consistent with the magnified positive qualities that he attributed to the work. Then he announces that he will divide his book into two parts:

> In the First Part will imitate the antique geometers, and … merely undertake without any *petitio principii* clearly to demonstrate the disputed Euclidean Axiom. (p. 65)

There, Saccheri (2014) indicates that the solution to the problem of the V Postulate would be "simple" and that "it would imitate the antique geometers". As a strategy to support the truth of the V Postulate, he intends to demonstrate it without incurring a *petitio principii*.

According to all the aforementioned, how can it be explained that Saccheri ‘reduced’ the problem of the V Postulate to **demonstrate** its veracity? As it was seen, in his preface he started from an ESC of “**wholly unshaken**” associated with the Euclidean work. One consequence of this ESC was to magnify the positive qualities of that work and minimize its imperfections or possible pitfalls. Consistent with these *attributions* and with the very charge of empirical truth that the V postulate had (in finite space), Saccheri maintained his truth and only questioned the strategy on which that truth value was based. In line with this, he raised *expectations* that the solution to the problem would be “simple” and it would suffice to "imitate" the antique geometers. This guided Saccheri's mathematical work, when he proposed as a solution to the problem to support the truth of the V in the strategy of “demonstrating"”(without *petitio principii*). Furthermore, that resolution respects Saccheri's *commitments*, such as following rigorous logic. This set of values, expectations, commitments of all kinds, beliefs, and intentions that are linked to the ESC here is called the *ESC interpretive framework* (IF).

To explain why Saccheri ‘minimized’ the problem of the V Postulate, we analyze how he handled that MI. In the first place, Saccheri accompanied this IF with a magnification of the positive qualities that he attributed to *the Elements* (with words like "great"), a minimization of its imperfections (with words like "fleck") and a simplification of the solution to those imperfections (with " I just commit"). This way of handling IF can be called *exaggeration*. Secondly, the solution to "demonstrate" that Saccheri proposed to solve the problem of the V Postulate, is totally consistent with the IF. It seems that the IF was considered as "rules that should be followed". Under those rules, other options for solving the problem would be discarded. For example, the option of questioning the Fifth Postulate as the only possibility would be ruled out, because it would go against the slogan of "imitating the antique geometers". Thus, the IF acted as a *bias* that guided Saccheri's strategy. According to what was said before, handling the IF with exaggerations and biases may explain why the mathematician trivialized the problem of the V Postulate. And why did Saccheri consider that IF as "rules that should be followed"? Saccheri asserts that the ESC of "wholly unshaken" in *the Elements* was long held by many mathematicians. Thus, questioning what emerged from that ESC would imply questioning centuries of tradition and great authorities, and it seems that neither Saccheri nor any mathematician of his time were willing to face that. Thus, *social consensus* may also explain why Saccheri appears to have "attenuated" the problem of the V Postulate.

Final remarks

We are now in a position to answer the research question, why does confidence in mathematical statements negatively influence the advancement of the discipline? Here it is argued that ESC have effects on mathematical work and decisions. Specifically, evidence has been provided here that ESC can give rise to the attribution of qualities to mathematical works and problems, to expectations on how to solve those problems, to logical, ontological and epistemological commitments, and in short, to an IF. From this IF, the person can guide his mathematical decisions and his disciplinary work, such as, for example, devising a strategy to solve a mathematical problem. It is necessary to clarify that the ESC are not, in essence, favorable or unfavorable for the advancement of mathematical knowledge. What the study shows is that, under certain conditions, they can be harmful. Some of these conditions have to do with how a person handles IF, particularly if it is accompanied by exaggerations, biases, and taking social consensus uncritically.

References

Corbin, J., & Strauss, A. (2015*). Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4nd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9–24.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Washington, DC, EE. UU.: Mathematical Association of America.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid´s Elements*. New York: Dover Publications.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 389-399.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66(1)*, 3-21.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and Epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 71-91.

Saccheri, G. (2014). Euclid Vindicated from Every Blemish. Switzerland: Springer.

Segal, J. (2000). Learning About Mathematical Proof: Conviction and Validity. *Journal of mathematical behavior*, *18* (2), 191-210.

¿LA CONFIANZA EN AFIRMACIONES MATEMÁTICAS PUEDE INFLUIR NEGATIVAMENTE EN EL AVANCE DE LA DISCIPLINA? ¿POR QUÉ?

CAN CONFIDENCE IN MATHEMATICAL AFIRMATIONSINFLUENCE NEGATIVELY IN THE ADVANCE OF THE DISCIPLINE? WHY?

Benjamín Martínez-Navarro
Cinvestav
benjaminmartinezn@gmail.com

Mirela Rigo-Lemini
Cinvestav
mrigolemini@gmail.com

La investigación se centra en el análisis de la confianza o la duda en afirmaciones matemáticas. Con base en la Teoría Fundamentada, y en el análisis de un caso histórico, el de las geometrías no euclidianas, y en especial en la figura de Saccheri, se responde a la pregunta que precede a este documento. Se argumenta que la confianza en la verdad de la geometría euclidiana tuvo como efectos la atribución de cualidades a dicha geometría y a los problemas identificados en esa obra, expectativas sobre la solución a esos problemas y la explicitación de compromisos lógicos, ontológicos y epistemológicos. Parece que, manejar con sesgos y exageraciones esos efectos de la confianza, puede resultar negativo para el desarrollo de trabajo matemático.

Palabras clave: Afecto, emoción, creencias y actitudes; Geometría.

Antecedentes, objetivo y pregunta de investigación

La investigación se centra en el análisis de estados como la confianza o la duda que las personas experimentan alrededor de la veracidad de afirmaciones matemáticas (como postulados, teoremas o resultados de tareas escolares, las que en lo sucesivo se denotarán como 'H'). A esos estados Rigo (2013) los llama estados epistémicos de convencimiento en torno a H y los representa como "eec". Diversas investigaciones han dado cuenta de la presencia de esos estados en todo tipo de práctica matemática, tanto las que se llevan en contextos escolares como en las de la matemática profesional (Fischbein, 1982; Harel y Sowder, 1998; Hersh, 1993; Segal, 2000).

En algunos casos, la seguridad en ciertos H's orienta adecuadamente el trabajo matemático, de lo que se desprenden avances en los aprendizajes. Por ejemplo, Inglis, Mejia-Ramos y Simpson (2007) afirman que una considerable reducción de la incertidumbre permite determinar el momento en el que ya se tienen herramientas suficientes para realizar una prueba; la reducción de la duda, funciona en este caso como una fuerza que incita la actividad matemática. En otros casos, la seguridad puede tener efectos nocivos en el avance de los aprendizajes de las matemáticas. Por ejemplo, en contextos de prueba matemática, Inglis, Mejia-Ramos y Simpson (2007) observaron que cuando un alumno asoció confianza a una afirmación basada en garantías inductivas, no tuvo después necesidad de construir una prueba que soportara dicha afirmación.

Así que los expertos han advertido que la seguridad en afirmaciones matemáticas a veces puede influir positivamente en el desarrollo de los aprendizajes o de los conocimientos disciplinares, pero en ocasiones esa influencia puede ser negativa. Sin embargo, en la literatura de educación matemática -y en la de otras áreas disciplinares- no se ha encontrado un desarrollo conceptual sistemático sobre las características de esa seguridad en afirmaciones matemáticas que dé cuenta de sus orígenes y sus efectos ni, en particular, se han construido explicaciones teóricas que permitan identificar y comprender las condiciones bajo las cuales los eec actúan favorable o desfavorablemente, a nivel didáctico. Se considera que sería necesario conocer a fondo esas condiciones, con el objeto de recrearlas o de inhibirlas en los contextos escolares.

Con el fin de atender a esas necesidades, en este documento se sugiere una primera y provisional respuesta, con base en explicaciones teóricas, a la pregunta ¿Por qué la confianza en afirmaciones matemáticas puede llegar a influir negativamente en el avance de la disciplina?

Metodología y métodos

La pregunta de investigación planteada en el escrito demanda explicaciones teóricas asociadas con el fenómeno del convencimiento, que vayan más allá de descripciones puntuales con escaso poder clarificador. Sin embargo, como ya se dijo, no se han construido teorías que ofrezcan esas explicaciones. Es por esto que en el presente documento no se parte de un marco teórico (simplemente, no existe) y se plantea justo como objetivo iniciar el desarrollo de uno. Para desarrollar esa teoría, se eligió la perspectiva de investigación cualitativa que ofrece la Teoría Fundamentada (TF, Corbin & Strauss, 2015). Una herramienta analítica de la TF es el 'análisis de contexto' (AC). En el AC se considera que cuando las personas actúan o tienen alguna experiencia interna están dando respuesta a sucesos significativos para ellas. Esos eventos se llaman 'condiciones'. De una fusión de condiciones, y de las acciones o experiencias internas que propician, se suelen desprender resultados. En el AC a esos resultados se les llama 'consecuencias'. Esas consecuencias pueden estimular más acciones o cambiar su rumbo. La teoría consiste así en un conjunto de explicaciones sobre cómo ciertas acciones o experiencias internas se pueden dar bajo una combinación de ciertas condiciones, y de cómo a partir de esas condiciones y acciones o experiencias internas, se pueden suscitar ciertas consecuencias.

En este manuscrito se ofrecen algunas explicaciones relativas a los fenómenos de los eec que experimentan las personas cuando realizan trabajo matemático. Para eso, siguiendo la TF, se recurrirá al AC. Pero aquí se centra la atención únicamente en el análisis de las consecuencias que esos eec tienen sobre el trabajo matemático. Para ese análisis, se puede recurrir a datos históricos, que se toman como datos empíricos (cf. Corbin & Strauss, 2015). En este escrito se analiza el papel de Saccheri en el desarrollo de las geometrías no euclidianas -quien es tristemente célebre por "ser víctima de la noción preconcebida de su tiempo, de que la única geometría posible era la euclidiana" (Heath, 1956, p. 211)-, porque ilustra el fenómeno bajo estudio. En particular, se analizan partes del prefacio de Saccheri a su obra *Euclides reivindicado de todo defecto* (Saccheri, 2014), porque ahí él explicita sus eec y deja ver cómo esos eec influyeron negativamente en su trabajo matemático. Siguiendo el AC, en el análisis se consideran a los eec como las experiencias internas y se identifican las consecuencias de esos eec. Posteriormente, esas consecuencias se denotan con conceptos y, al final, se utilizan esos conceptos para explicar cómo los eec influyeron (al inicio) en el trabajo matemático de Saccheri.

Reporte de resultados: la certeza como obstáculo para el avance de conocimientos

Saccheri inicia el prefacio a su obra *Euclides reivindicado de todo defecto* con lo siguiente:

> De todos los que han aprendido matemáticas, ninguno ha dejado de saber cuán grande es la excelencia y el valor de *Los Elementos* de Euclides. Como testigos eruditos aquí, convoco a Arquímedes, Apolonio, Teodosio y otros, casi innumerables, profesionales de matemáticas, incluso de nuestros tiempos, que usan a *Los Elementos* de Euclides como fundamento totalmente incontrovertible establecido desde hace mucho tiempo. (Saccheri, 2014, p. 62)

Ahí, el matemático comienza por atribuir a *Los Elementos* de Euclides una cualidad positiva (de "excelencia") magnificada (con la palabra "grande"). Luego, él soporta la atribución de esa cualidad en el eec de "totalmente incontrovertible" que varias autoridades matemáticas atribuyeron a la obra a lo largo de mucho tiempo. Saccheri (2014) así continúa:

> Pero esta gran celebridad no ha impedido a muchos, tanto antiguos como modernos, y entre ellos distinguidos geómetras, sostener que habían encontrado ciertas imperfecciones en estos Elementos tan bellos y suficientemente elogiados. Ellos designan tres de esos lunares. (p. 62)

La atribución de cualidades positivas magnificadas a la obra euclidiana, según Saccheri, no impidió que los matemáticos identificaran imperfecciones en ella. Sin embargo, el matemático apeló a esas cualidades positivas magnificadas, para interpretar dichas imperfecciones como cualidades negativas mínimas de la obra (i.e. 'lunares'). ¿Qué consecuencias se desprendieron de esa atribución de cualidades a la obra euclidiana y a sus imperfecciones? Saccheri continúa:

> La primera ('mota') se refiere a la definición de paralelas y con ella el Axioma que en Clavius es el decimotercero del Primer Libro de *Los Elementos*, donde Euclides dice: "Si una línea recta que cae sobre otras dos líneas rectas, que yacen en el mismo plano, hace con ellas dos ángulos interiores sobre el mismo lado menores que dos ángulos rectos, estas dos líneas rectas producidas infinitamente hacia esas partes se encontrarán entre sí". Nadie duda de la verdad de esta afirmación; pero únicamente acusan a Euclides en cuanto a ella, porque él ha usado para esa afirmación el nombre de Axioma, como si obviamente solo por la correcta comprensión de sus términos se llegara a la convicción. (Saccheri, 2014, p. 62)

Ahí, Saccheri (2014) comienza por anunciar que una imperfección (calificada por él como "lunar") de la obra euclidiana se relaciona con el V Postulado. Luego, él enuncia ese postulado y conecta con un eec: "Nadie duda de la verdad de esta afirmación". De modo que, para Saccheri, nunca se puso en entredicho el alto grado de compromiso con el valor de verdad del V Postulado. Para él, la imperfección consistía en que a esa afirmación se le dio el estatus de axioma. Es decir, lo que cuestionó, fue la estrategia utilizada para otorgar el valor de verdad al V Postulado. En suma, una primera consecuencia de haber atribuido cualidades positivas magnificadas a la obra euclidiana y de haber interpretado sus imperfecciones como cualidades negativas mínimas fue que, a pesar de hallar dificultades en una de sus afirmaciones (el V Postulado), la verdad de dicha afirmación se sostuvo con un alto grado de compromiso y únicamente se cuestionó la estrategia en la que se basó ese valor de verdad. Otras consecuencias se desvelan a continuación:

> Algunos, y estos seguramente los más entusiastas, se esfuerzan por demostrar la existencia de líneas rectas paralelas, como se definen en *Los Elementos*, de donde salen a la prueba de la afirmación debatida, como se indica en Euclides, y sobre la cual verdaderamente descansan esos *Elementos* (con algunas muy pocas excepciones) y toda la geometría. Pero otros (no sin un gran pecado contra una lógica rigurosa) asumen tales líneas rectas paralelas, como equidistantes, como si de allí pudieran llegar a lo que queda por demostrar. (p. 62)

Al criticar los intentos de otros para resolver el problema del V Postulado, Saccheri explicita su compromiso con la definición euclidiana de rectas paralelas, con el papel del V Postulado como "soporte de toda la geometría" o con la "lógica rigurosa". La explicitación de esos compromisos en torno a los *Elementos* es congruente con las cualidades positivas magnificadas que Saccheri atribuyó a la obra. Luego, él anuncia que dividirá su libro en dos partes:

> En la primera parte imitaré a los geómetras antiguos, y… simplemente me comprometo sin ningún *petitio principii* a demostrar claramente el disputado Axioma Euclidiano. (p. 65)

Ahí, Saccheri (2014) indica que la solución al problema del V Postulado sería "simple" y que "imitaría a los geómetras antiguos". Como estrategia para sustentar la verdad del V Postulado, él se propone demostrarlo sin incurrir en una petición de principio.

De acuerdo a todo lo antes dicho ¿Cómo se puede explicar que Saccheri 'redujera' la problemática del V Postulado a **demostrar** su veracidad? Como se vio, en su prefacio él partió de un eec de **incontrovertible** asociado a la obra euclidiana. Una consecuencia de ese eec fue *magnificar las cualidades* positivas de esa obra y *minimizar sus imperfecciones* o los posibles escollos. De forma congruente con esas atribuciones y, hay que decirlo, con la propia carga de veracidad empírica que tenía el V postulado, Saccheri sostuvo su verdad y solo cuestionó la estrategia en la que se basaba ese valor de verdad. En línea con esto, él se planteó *expectativas* de que la solución al problema sería "simple" y bastaría con "imitar" a los geómetras antiguos. Lo anterior orientó el trabajo matemático de Saccheri, cuando planteó como solución al problema desprender la verdad del V por medio de la estrategia de "demostrar" (sin petición de principio). Además, esa resolución respeta *compromisos* adquiridos por Saccheri, como seguir la lógica rigurosa. A ese conjunto de valores, expectativas, compromisos de todo tipo, planes, creencias e intenciones que se coligan con los eec aquí se llama *marco interpretativo de los eec (MI)*.

Para explicar por qué Saccheri 'minimizó' la problemática del V Postulado, a continuación se analiza cómo él manejó ese MI. En primer lugar, Saccheri acompañó dicho MI de una magnificación de las cualidades positivas que él atribuyo a *Los Elementos* (con palabras como "grande"), de una minimización de sus imperfecciones (con palabras como "lunar") y de una simplificación de la solución a esas imperfecciones (con "simplemente me comprometo"). A esa forma de manejar el MI se le puede llamar *exageración.* En segundo lugar, la solución de "demostrar" que Saccheri se planteó para resolver el problema del V Postulado, es totalmente congruente con el MI. Pareciera que el MI se consideró como "reglas que deberían seguirse". Bajo esas reglas, otras opciones para resolver el problema quedarían descartadas. Quedaría descartada, por ejemplo, la opción de cuestionar al V Postulado como la única posibilidad, porque iría en contra de la consigna de "imitar a los geómetras antiguos". Así, el MI actuó como un *sesgo* que orientó la estrategia de Saccheri. De acuerdo a lo antes dicho, manejar el MI con exageraciones y sesgos puede explicar por qué el matemático trivializó el problema del V Postulado. ¿Y por qué Saccheri consideró a ese MI como "reglas que deberían seguirse"? Saccheri afirma que el eec de incontrovertible en *los Elementos* lo sostuvieron prolongadamente muchos matemáticos. Así, cuestionar aquello que se desprendía de ese eec implicaría cuestionar siglos de tradición y a grandes autoridades, y parece que ni Saccheri ni ningún matemático de su época estaban dispuestos a enfrentar eso. De modo que, el *consenso social* también puede explicar por qué Saccheri parece haber 'atenuado' el problema del V Postulado.

Consideraciones finales

Se está ahora en condiciones de responder a la pregunta de investigación ¿por qué la confianza en afirmaciones matemáticas puede influir negativamente en el avance de la disciplina? Aquí se argumenta que los eec tienen efectos sobre las decisiones y los trabajos matemáticos. Específicamente, aquí se han aportado evidencias de que los eec pueden dar lugar a la atribución de cualidades a obras y problemas matemáticos, a expectativas sobre cómo resolver esos problemas, a compromisos lógicos, ontológicos y epistemológicos, y en suma, a un MI. A partir de ese MI, la persona puede orientar sus decisiones matemáticas y su trabajo disciplinar como, por ejemplo, plantear una estrategia para resolver un problema matemático. Es necesario aclarar que los eec no son, en esencia, favorables o desfavorables para el avance del conocimiento matemático. Lo que muestra el estudio es que, bajo ciertas condiciones, pueden resultar perjudiciales. Algunas de esas condiciones tienen que ver con cómo una persona maneja el MI, en particular si lo acompaña con exageraciones, sesgos y tomando el consenso social de manera acrítica.

Referencias

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4nd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3(2)*, 9–24.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Washington, DC, EE. UU.: Mathematical Association of America.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid´s Elements*. New York: Dover Publications.

¿La confianza en afirmaciones matemáticas puede influir negativamente en el avance de la disciplina? ¿Por qué?

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 389-399.
Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66(1)*, 3-21.
Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and Epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 71-91.
Saccheri, G. (2014). Euclid Vindicated from Every Blemish. Switzerland: Springer.
Segal, J. (2000). Learning About Mathematical Proof: Conviction and Validity. *Journal of mathematical behavior*, *18* (2), 191-210.