TOWARDS A DIDACTIC DISTINCTION BETWEEN CALCULUS AND ANALYSIS. THE CASE OF THE NOTION OF VARIABLE

HACIA UNA DISTINCIÓN DIDÁCTICA ENTRE EL CÁLCULO Y EL ANÁLISIS. EL CASO DE LA NOCIÓN DE VARIABLE

María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora
maría.davila@unison.mx

Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora
agustin.grijalva@unison.mx

This paper presents the results of a large documentary study, the purpose of which is to promote a research and teaching program for the didactic reconceptualization of Calculus, through detailed argumentation that makes visible the problems surrounding the profound influence of the organization of Mathematical Analysis on the teaching of Calculus, which makes it difficult for students to understand and use the central ideas of Calculus. The study was conducted using theoretical notions of the onto-semiotic approach (OSA) to mathematical knowledge and instruction. An inquiry on the objects of study of each mathematical discipline will be presented, situating the different problem-situations that each one addresses and the procedures, languages, properties, arguments, and concepts that differentiate them. Finally, these differences are illustrated in relation to the notion of variable.

Keywords: Calculus, Curriculum, Instructional Vision.

Introduction and problem

At the center of Calculus teaching lies a problem deeply close to the historical development of this discipline and to Mathematics itself. Authors such as Moreno-Armella (2014) have described that problem as a tension between intuition and formalism, related to the tendency to present the intuitive ideas of Calculus from the perspective of Mathematical Analysis (Ímaz & Moreno, 2010). Calculus textbooks, that materialize this teaching approach, usually organize mathematical content around the notions of function and limit, considered the basis for studying the derivative and the integral of a function. The same textbooks emphasize mathematical practices such as defining, arguing, and demonstrating, and not the foundational intuitive ideas of Calculus about variation and accumulation.

This work is part of the research of Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila-Araiza and Romero, (in press), which continues the line drawn by the study of Ímaz and Moreno (2010) to make a clear distinction, with didactic purposes, between Calculus and Mathematical Analysis. The study of Jiménez et al. it is a documentary research. It presents, in a critical way, historical and epistemological facts and arguments found in books and research articles that help explain the current state of Calculus teaching, drawing a path for its necessary transformation. The current didactic route, implicit in the textbooks, constitutes a path full of difficulties for students, associated with the formalized notion of limit (Cory & Garofalo, 2011; Roh, 2008 & Nagle, 2013) and other mathematical notions, such as real numbers and functions (Artigue, 1998). These notions are presented in classrooms from a perspective that seeks to establish a basis for the study of Mathematical Analysis and not the understanding of the key aspects of Calculus.

As one of the results of this documentary research, this paper will present, without pretenses of exhaustiveness, a distinction of the contents of Calculus and Mathematical Analysis, which serves to show the strong influence of Analysis on the teaching of Calculus. Later, with respect to the notion of variable, a distinction will also be made from the perspective of Calculus and Analysis. These distinctions will be made using theoretical tools of the onto-semiotic approach (OSA) to mathematical knowledge and instruction (Godino, Batanero & Font, 2007), which allows a detailed analysis of mathematical content and the establishment of categories that facilitate their contrast.

Theoretical Elements

In OSA a pragmatic position is assumed to study the mathematical objects that intervene and emerge when solving problems, putting the focus on the notion of *mathematical practice* to refer to any practical or discursive performance that is carried out when solving problems or communicating the obtained results. Rather than hinting at isolated practices, OSA is concerned with the *systems of practices* that are carried out to deal with problem situations. With this idea, *mathematical objects* are characterized as emerging from systems of practice, allowing the following six types of *primary* mathematical objects to be distinguished, some of which are ostensive in nature and others non-ostensive: *Problem-situations* (more or less open problems, exercises, extra or intra mathematical applications, etc.); *language* (specific mathematical terms, algebraic expressions, number tables, graphs, diagrams, gestures, etc.); *procedures* (techniques, algorithms, etc., undertaken or executed by the subject faced with mathematical tasks); *properties and propositions* (attributes of the mentioned objects); *arguments* (which are used to validate and explain the propositions) and *concepts* (mathematical objects recognized as part of the mathematical structure, characterized by their essential properties, which allow them to be distinguished from others and are usually expressed through descriptions or definitions).

Contrast of the primary mathematical objects of Calculus and Analysis

Below is an analysis of four of the six types of primary mathematical objects, corresponding to Calculus and Mathematical Analysis, from which it is possible to show that the current approach to teaching Calculus does not fully consider the initial ideas of this discipline, but rather presents a version more in line with the purposes of Mathematical Analysis.

Table 1. Contrast of primary mathematical objects of Calculus and Analysis

Calculus	Analysis
Concepts: Variable magnitude, variation and covariation, instantaneous rate of change, infinitely small magnitude, differential, accumulation, evanescent quantity, infinite sum, derivative, integral, function.	*Concepts:* Real number, function (increasing, decreasing, bijective, continuous, differentiable, bounded, integrable), derivative of a function, definite integral of a function in an interval, limit of a function, succession, convergence.
Problem-situations (usually linked to physical or geometric contexts): To determine how much there is of a magnitude at all times, knowing the rate of change of such magnitude at all times, and inversely determine its rate of change at all times knowing how much there is of that magnitude in any given moment. To determine the quadrature of a figure formed by a curve and the slope of the tangent line to that curve at each point of it.	*Problem-situations*: To define the mentioned concepts and establish their properties. From their definitions, to determine when a relationship is a function, when a function is injective, bijective, increasing, decreasing, continuous, differentiable or integrable. To determine the limit of a function. To establish when the limit of a function exists, when a function is continuous, if a discontinuity is removable, when a function is differentiable or integrable.
Properties (they tend to be implicitly assumed): variable magnitudes vary continuously. Differential magnitudes are non-Archimedean in nature. Differential quantities depend on the phenomenon.	*Properties* (presented in isolation from their contexts of extra-mathematical use): Theorems of the mean value and the intermediate value. Properties of the limits of functions and differentiable functions. Conditions of

Language: Combination of the natural language with specific languages from the application areas. Algebraic, numeric and geometric representations. Algebraic treatment of differential magnitudes, such as $\boldsymbol{dx, dy, dz, dt}$, and of infinite sums represented as $\int \boldsymbol{x^2 dx}, \int \boldsymbol{senx\ dx}$, among others.	integrability of a function, fundamental theorem of calculus, etc. *Language*: Predominant use of analytical language of a formal nature and little use of numerical and graphic representations. The center of the language of analysis is that associated to functions and, linked to it, the criteria of convergence and continuity, representing the proximity between representative values by means of the absolute value of the difference of two magnitudes of interest.

The notion of variable from the Calculus perspective

The study of variable begins in high school, where two main meanings are promoted, one associated with the study and resolution of equations of two or more variables, and the other as *a generalized number* associated with the problems of numerical and figurative patterns. Subsequently, in the Calculus university courses, the concept of variable is not usually discussed (Biehler & Kempen, 2013). Only when defining function is it mentioned that *x* is an element in a set called *domain*, while *y* is an element in the set called *range*. Consequently, the variable is considered as “something” that takes all the values in a certain set of numbers or “something” that represents all the elements of a given set. This concept of variable corresponds to Set theory, a typical approach from Mathematical Analysis (see Apostol, 1979, p. 40), more importantly, a *decontextualized and static meaning*.

Favoring an static and decontextualized meaning of the variable generates difficulties for students in the modeling of physical phenomena with the tools of Calculus (López-Gay, Martínez Sáez & Martínez-Torregrosa, 2015), since for the students a variable is a letter that represents replaceable constants, that is, the variables *do not vary* in the students' thinking, as documented by Jacobs and Trigueros (cited in Thompson, Byerley & Hatfield, 2013). Thompson, Byerley and Hatfield (2013) affirm that to develop a variational meaning of the variable characteristic of Calculus, it is not enough to think of the variation as the simple substitution of one number for another; it is important to understand that this change in value is not arbitrary, but it occurs under a certain progression or sequence that is usually dependent on time. This sheds light on an important distinction: time is a central notion in Calculus; however, in Analysis it is not, as Bolzano expressed: “the concept of time, and even more that of motion, is as external to general mathematics as that of space” (quoted in Bottazzini, 1986, p. 98).

In Calculus, the variable is a dynamic notion that is intimately linked to time and physical contexts, since it emerges from the study of variable magnitudes and the relationships that can be established between them when trying to understand, and mathematize processes and variation phenomena that are present in the physical and social environment, in which a measurable changing property is manifested. In Calculus, the verb *to vary* refers to a change in progress (Thompson, Ashbrook & Milner, 2016), whether it is actually happening, or one can imagine that it is. In this sense, a variable quantity can be described as a *quantifiable property* of an object, process, or phenomenon of variation. In other words, “the variable magnitude that is measured or calculated takes progressively different values at different times, as the phenomenon or process in which it intervenes develops” (Jiménez et al., In press). It is important to highlight that the quantifiable quality not only takes each and every one of the numerical values in a set, but it does so sequentially, as time passes.

Consequently, the variable magnitudes in the Calculus, due to all the characteristics that they possess, particularly those described above, do not have the same meaning as the variable from the perspective of Mathematical Analysis, where the variables have no link to physical reality, nor with time or motion, as Bolzano explained it. In Mathematical analysis the variables are timeless, dimensionless, static (they do not involve motion). The way in which the analysis variable "takes" the values of a set needs to be completely arbitrary, it does not obey a temporal sequence.

Conclusions

The analysis of primary mathematical objects allowed us to identify that the systems of mathematical practices of Calculus and Mathematical Analysis are essentially different. Broadly speaking, the mathematical practices of Calculus are oriented to the study of the phenomena of variation by establishing relationships between variable magnitudes, while the mathematical practices of Analysis focus on the definition and study of functions, derivatives, integrals, and its properties, through the notions of real number and limit.

Regarding the notion of variable, it is important to highlight that Calculus students hardly have an approach to it from a variational perspective, which would allow them to develop the variational thinking necessary for understanding the fundamental ideas of this discipline that will become mathematical tools necessary for the prediction and control of change processes; the field of application of the Calculus.

The presented arguments aim to outline, for didactic purposes, some essential differences between Calculus and Analysis, taking as a particular case the notion of variable, to shed light on how Calculus teaching neglects aspects that are central to the understanding of its foundational ideas, by privileging a formal treatment of the mathematical content more attached to the perspective of Mathematical Analysis. These reflections remind us that the discussion on how to reorient the teaching of Calculus, as well as didactic research, towards understanding the central ideas of Calculus that would allow students to be efficient users of the mathematics of change is still pending.

References

Apóstol, T. (1979). *Análisis Matemático* (2ª. Ed). España: Editorial Reverté.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55

Baldwin, J. (2009) Variable: syntax, semantics, and situations. Retrieved from http://homepages.math.uic.edu/-jbaldwin/pub/var5.pdf

Biehler, R., & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. *In Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 86-95).

Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. Virginia: Springer-Verlag.

Bradley, R. E., & Sandifer, C. E. (2009). Cauchy's Cours d'analyse. An annotated translation. doi: 10.1007/978-1-4419-0549-9.

Cory, B., & Garofalo, J. (2011). Using dynamic sketches to enhance preservice secondary mathematics teachers' understanding of limits of sequences. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 65-97

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. (Versión).

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Ímaz, C., & Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. México: Trillas

Jiménez, J., Grijalva, A., Milner, F., Dávila-Araiza, M. T. & Romero, C. (en prensa). *Reconceptualización didáctica del Cálculo*. México: Editorial AMIUTEM

López-Gay, R., Martínez Sáez, J., & Martínez-Torregrosa, J. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education*, *24*, 591–613. doi:10.1007/s11191-015-9757-7

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*(4), 621-633. doi: 10.1007/s11858-014-0580-4

Nagle, C. (2013). Transitioning from introductory calculus to formal limit conceptions. *For the Learning of Mathematics, 33*(2), 2-10

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233. doi:10.1007/s10649-008-9128-2

Suisky, D. (2009). *Euler as physicist*. doi: 10.1007/978-3-540-74865-6

Thompson, P., Ashbrook, M., & Milner, F. (2016). *DIRACC: Developing and Investigating a Rigorous Approach to Conceptual Calculus*. Retrieved from http://patthompson.net/ThompsonCalc/

Thompson, P.W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. *Computers in the Schools, 30,*124–147

HACIA UNA DISTINCIÓN DIDÁCTICA ENTRE EL CÁLCULO Y EL ANÁLISIS. EL CASO DE LA NOCIÓN DE VARIABLE

TOWARDS A DIDACTIC DISTINCTION BETWEEN CALCULUS AND ANALYSIS. THE CASE OF THE NOTION OF VARIABLE

María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora
maría.davila@unison.mx

Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora
agustin.grijalva@unison.mx

Se presentan resultados de un estudio amplio, de carácter documental, cuya finalidad es el impulso a un programa de investigación y docencia para la reconceptualización didáctica del cálculo, a través de una argumentación detallada que visibiliza la problemática en torno a la influencia profunda de la organización del Análisis Matemático sobre la enseñanza del Cálculo, que dificulta a los estudiantes la comprensión y uso de las ideas centrales del Cálculo. El estudio se realizó usando nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS). Se presentará una indagación sobre los objetos de estudio de cada disciplina matemática señalada, ubicando las diferentes situaciones problema que aborda cada una de ellas y los procedimientos, lenguajes, propiedades, argumentos y conceptos que las diferencian. Por último, se ilustran estas diferencias con relación a la noción de variable.

Palabras clave: Cálculo, currículo, visión de enseñanza.

Introducción

En el centro de la enseñanza del Cálculo yace una problemática profundamente ligada al desarrollo histórico de esta disciplina y de las matemáticas mismas, que autores como Moreno-Armella (2014) han relacionado con una tensión entre lo intuitivo y lo formal, y una tendencia a presentar el Cálculo desde la perspectiva del Análisis Matemático (Ímaz & Moreno, 2010). En los textos de Cálculo, que materializan el enfoque de su enseñanza, se suele organizar el contenido en torno a las nociones de función y límite, para llegar al estudio de la derivada y la integral, enfatizando prácticas matemáticas como fundamentar, definir y demostrar, y no en torno a las ideas intuitivas fundacionales del Cálculo sobre variación y acumulación.

Este trabajo se enmarca en la investigación de Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila-Araiza y Romero, (en prensa), que da continuidad a la línea trazada por la investigación de Ímaz y Moreno (2010) para realizar una distinción clara, con fines didácticos, entre el Cálculo y el Análisis Matemático como disciplinas en la enseñanza. La investigación de Jiménez et al. es de tipo documental; recopila hechos y argumentos de corte histórico y epistemológico en libros y artículos de investigación que permiten explicar el estado actual de la enseñanza del Cálculo y esbozar una línea para su necesaria transformación; considerando que la ruta didáctica actual, implícita en los libros de texto, constituye para los estudiantes un camino plagado de dificultades asociadas a la noción formalizada de límite (Cory & Garofalo, 2011; Roh, 2008 y Nagle, 2013) y otras nociones matemáticas, como los números reales y la función (Artigue, 1998), que son presentados desde una perspectiva que busca a sentar bases para el estudio del Análisis Matemático y no la comprensión de las nociones centrales del Cálculo.

Como uno de los resultados de esta investigación documental, en este escrito se presentará, primeramente, de manera general (y sin pretensiones de exhaustividad) una distinción de contenidos matemáticos del Cálculo y del Análisis Matemático, que permiten mostrar la fuerte influencia del Análisis sobre la enseñanza del Cálculo. Posteriormente, con respecto a la noción de variable, también se realizará una distinción desde la perspectiva del Cálculo y del Análisis. Estas distinciones se realizarán mediante herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico, EOS, (Godino, Batanero & Font, 2007), las cuales permiten analizar detalladamente contenidos matemáticos y establecer categorías que faciliten su contraste.

Elementos teóricos

En el EOS se asume una posición pragmática para estudiar los objetos matemáticos que intervienen y emergen al resolver problemas, poniendo el enfoque en la noción de *práctica matemática* para referirse a cualquier actuación práctica o discursiva que se realiza al resolver problemas o comunicar los resultados obtenidos. Pero, más que hacer alusión a prácticas aisladas, el EOS se preocupa por los sistemas de prácticas que se realizan para enfrentar las situaciones problema. Con esta idea, se caracteriza a los objetos matemáticos como los emergentes de los sistemas de prácticas, permitiendo distinguir los seis siguientes tipos de *objetos matemáticos primarios*, algunos de los cuales son de naturaleza ostensiva y otros son no ostensivos: *Situaciones problema* (problemas más o menos abiertos, ejercicios, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, etc.); *lenguaje* (términos específicos de matemáticas, expresiones algebraicas, tablas numéricas, gráficas, diagramas, gestos, etc.); *procedimientos* (técnicas, algoritmos, etc., emprendidos o ejecutados por el sujeto ante las tareas matemáticas); *propiedades* (atributos de los objetos mencionados); *argumentos* (que se usan para validar y explicar las proposiciones) y *conceptos* (objetos matemáticos reconocidos como parte de la estructura matemática, caracterizados por sus propiedades esenciales, las que permiten distinguirlos de otros y suelen expresarse por medio de descripciones o definiciones).

Contraste de objetos matemáticos primaros del Cálculo y del Análisis

A continuación, se presenta de manera general un análisis de cuatro de los seis tipos de objetos matemáticos primarios, sin pretender ser exhaustivos, correspondientes al Cálculo y al Análisis Matemático, a partir del cual es posible poner de manifiesto que el enfoque actual de la enseñanza del Cálculo no considera plenamente las ideas iniciales de esta disciplina, sino que presenta una versión del Cálculo mas acorde a los propósitos del Análisis Matemático.

Tabla 1. Contrastación de objetos matemáticos primarios del Cálculo y del Análisis

Cálculo	Análisis
Conceptos: Magnitud variable, (co)variación, razón instantánea de cambio, magnitud infinitamente pequeña, diferencial, acumulación, cantidad evanescente, suma infinita, derivada, integral, función.	*Conceptos:*Número real, función (creciente, decreciente, biyectiva, continua, diferenciable, acotada, integrable), derivada de una función, integral de una función en un intervalo, límite de una función, sucesión, convergencia, entre otras.
Situaciones problema (normalmente vinculadas a contextos físicos o geométricos): Determinar	*Situaciones problema*: Definir los conceptos mencionados y establecer propiedades de estos. A

cuánto hay de una magnitud en todo momento, conociendo la razón de cambio de esa magnitud en todo momento, e inversamente determinar su razón de cambio en todo momento conociendo en todo momento cuánto hay de esa magnitud. Determinar la cuadratura de una figura formada por una curva y, determinar la pendiente de la recta tangente a dicha curva en cada punto de ella.	partir de dichas definiciones, determinar cuándo una relación es función, cuándo una función es inyectiva, suprayectiva, biyectiva, creciente, decreciente, continua, diferenciable o integrable. Determinar el límite de una función. Establecer cuándo existe el límite de una función, cuándo es continua una función, si es removible una discontinuidad, cuándo una función es diferenciable o integrable.
Propiedades (tienden a ser asumidas de forma implícita): Por ejemplo, las magnitudes variables varían de manera continua, las magnitudes diferenciales tienen una naturaleza no Arquimediana, las cantidades diferenciales son propias de cada fenómeno.	*Propiedades* (se presentan aisladas de sus contextos de uso extramatemático): Teoremas del valor medio y del valor intermedio. Propiedades de los límites de funciones y de las funciones diferenciables. Condiciones de integrabilidad de una función, teorema fundamental del cálculo, etc..
Lenguaje: combinación de la lengua materna con lenguajes específicos de las áreas de aplicación. Expresiones numéricas geométricas y algebraicas. que representan magnitudes diferenciales como $\boldsymbol{dx}, \boldsymbol{dy}, \boldsymbol{dz}$, d$\boldsymbol{t}$ y de las sumas finitas, representadas por expresiones como $\int \boldsymbol{x^2\, dx}$, $\int \boldsymbol{senx\, dx}$ y otras.	*Lenguaje*: preponderantemente analítico, de carácter formal y poco empleo de las representaciones numéricas y gráficas. El centro del lenguaje del análisis es el de función y, ligado a ésta, los criterios de convergencia y de continuidad, representando la proximidad entre valores representativos mediante el valor absoluto de la diferencia de dos magnitudes de interés.

La noción de variable desde la perspectiva del Cálculo

El estudio de la variable inicia en la escuela secundaria, donde se promueven dos significados principales, uno asociado al estudio y resolución de ecuaciones de dos o más variables, y otro como número generalizado asociado a los problemas de patrones numéricos y figurales. Posteriormente, en los cursos universitarios de Cálculo no se suele discutir el concepto de variable (Biehler & Kempen, 2013). Únicamente, al definir la función, se menciona que x es un elemento en un conjunto llamado dominio, mientras que y es un elemento del conjunto llamado rango. Como consecuencia, la variable es considerada como "algo" que toma todos los valores en cierto conjunto de números o "algo" que representa a los elementos de un conjunto. Este concepto de variable corresponde a un significado conjuntista, propio del Análisis Matemático (ver Apostol, 1979, p. 40), un significado descontextualizado y estático.

Favorecer un significado estático y descontextualizado de la variable produce dificultades en los estudiantes para la modelación de fenómenos físicos con las herramientas del Cálculo (López-Gay, Martínez Sáez & Martínez-Torregrosa, 2015), pues para los estudiantes una variable es una letra que representa constantes reemplazables, es decir, las variables no varían en el pensamiento de los estudiantes, como lo documentaron Jacobs y Trigueros (citados en Thompson, Byerley & Hatfield, 2013). Thompson, Byerley y Hatfield (2013) afirman que para desarrollar un significado variacional de la variable propio del cálculo no es suficiente pensar en la variación como el cambio de un número por otro; es importante comprender que ese cambio de valor no es arbitrario, sino que ocurre bajo cierta progresión o secuencia normalmente temporal. Esto arroja luz sobre un aspecto importante: el tiempo es una noción central en el Cálculo; sin embargo, en el Análisis no lo es, como lo expresó Bolzano: "el concepto de tiempo, y más aún aquel de movimiento, es tan externo a las matemáticas generales como aquel de espacio" (citado en Bottazzini, 1986, p. 98).

En el Cálculo, la variable es una noción dinámica que está íntimamente ligada al tiempo y a los contextos físicos, pues ésta emerge del estudio de las magnitudes variables y de las relaciones que se pueden establecer entre ellas al tratar de comprender, y matematizar, procesos y fenómenos de variación que están presentes en el entorno físico y social, en los cuales se manifiesta una propiedad cambiante que puede ser medible. En el Cálculo, el verbo variar se refiere a un cambio en progreso (Thompson, Ashbrook & Milner, 2016), ya sea efectivamente está sucediendo o bien que se puede imaginar que lo hace. En este sentido, una magnitud variable se puede describir como una propiedad de un objeto, proceso o fenómeno de variación, la cual es cuantificable. Es decir, "la magnitud variable que se mide o calcula toma progresivamente distintos valores en distintos momentos, a medida que va desarrollándose el fenómeno o proceso en que ella interviene" (Jiménez et al., en prensa). Es importante resaltar que la cualidad cuantificable no solamente toma todos y cada uno de los valores numéricos en un conjunto, sino que lo hace de manera secuencial, a la par que transcurre el tiempo.

En consecuencia, las magnitudes variables en el Cálculo, por todas las características que poseen y que se describieron líneas arriba, no tienen el mismo significado que la variable desde la perspectiva propia del Análisis Matemático, donde las variables no tienen vínculo alguno con la realidad física ni con el tiempo o el movimiento, como lo expresó Bolzano. En el análisis Matemático las variables son atemporales, adimensionales, estáticas (no involucran el movimiento). La manera como la variable del análisis "toma" los valores de un conjunto es completamente arbitraria, no obedece necesariamente una secuencia temporal.

Conclusiones

El análisis de objetos matemáticos primarios permitió identificar que los sistemas de prácticas matemáticas del Cálculo y del Análisis Matemático son esencialmente distintos. A grandes rasgos, las prácticas matemáticas del Cálculo se orientan al estudio de los fenómenos de variación mediante el establecimiento de relaciones entre magnitudes variables, mientras que las prácticas matemáticas del Análisis se centran en la definición y estudio de la función, la derivada, la integral y sus propiedades, a través de las nociones de número real y límite.

Con respecto a la noción de variable, es importante resaltar que difícilmente los estudiantes de Cálculo tienen un acercamiento a ésta desde una perspectiva variacional, que les permitiría desarrollar un pensamiento variacional necesario para la comprensión de las ideas fundamentales de esta disciplina que son en herramientas matemáticas necesarias para la predicción y control de procesos de cambio; el campo de aplicación del Cálculo.

Los argumentos presentados brevemente pretenden esbozar, con propósitos didácticos, algunas diferencias esenciales entre el Cálculo y el Análisis, tomando como caso particular la noción de variable, para arrojar luz sobre cómo la enseñanza del Cálculo desatiende aspectos que son centrales para la comprensión de sus ideas fundacionales, al privilegiar un tratamiento formal del contenido matemático más apegado a la perspectiva del Análisis Matemático. Estas reflexiones nos recuerdan que sigue pendiente la discusión sobre cómo reorientar la enseñanza del Cálculo, así como la investigación didáctica, hacia la comprensión de las ideas centrales del Cálculo que permita a los estudiantes ser usuarios eficientes de las matemáticas del cambio.

Referencias

Apóstol, T. (1979). *Análisis Matemático* (2ª. Ed). España: Editorial Reverté.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55

Baldwin, J. (2009) Variable: syntax, semantics and situations. Recuperado de http://homepages.math.uic.edu/-jbaldwin/pub/var5.pdf

Biehler, R. & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. *In Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 86-95).

Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. Virginia: Springer-Verlag.

Bradley, R. E., & Sandifer, C. E. (2009). Cauchy's Cours d'analyse. An annotated translation. doi: 10.1007/978-1-4419-0549-9.

Cory, B., & Garofalo, J. (2011). Using dynamic sketches to enhance preservice secondary mathematics teachers' understanding of limits of sequences. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 65-97

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. (Versión).

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Ímaz, C., & Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. México: Trillas

Jiménez, J., Grijalva, A., Milner, F., Dávila-Araiza, M. T. & Romero, C. (en prensa). *Reconceptualización didáctica del Cálculo*. México: Editorial AMIUTEM

López-Gay, R., Martínez Sáez, J., & Martínez-Torregrosa, J. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education*, *24*, 591–613. doi:10.1007/s11191-015-9757-7

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*(4), 621-633. doi: 10.1007/s11858-014-0580-4

Nagle, C. (2013). Transitioning from introductory calculus to formal limit conceptions. *For the Learning of Mathematics, 33*(2), 2-10

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233. doi:10.1007/s10649-008-9128-2

Suisky, D. (2009). *Euler as physicist*. doi: 10.1007/978-3-540-74865-6

Thompson, P., Ashbrook, M., & Milner, F. (2016). *DIRACC: Developing and Investigating a Rigorous Approach to Conceptual Calculus*. Recuperado de: http://patthompson.net/ThompsonCalc/

Thompson, P.W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. *Computers in the Schools, 30,*124–147