TEACHERS' COGNITIVE PROCESSES DURING THE TEACHING OF FRACTIONS AND MULTIPLICATIVE PROBLEMS

LOS PROCESOS COGNITIVOS DE PROFESORES DURANTE LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES Y PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Marta Ramírez-Cruz
Center for Research and Advanced Studies
CINVESTAV
marta.ramirez@cinvestav.mx

Marta Elena Valdemoros-Álvarez
Center for Research and Advanced Studies
CINVESTAV
mvaldemo@cinvestav.mx

This communication is about the case of a secondary school teacher and forms part of an investigation carried out with teachers. The aim is to identify the mathematical knowledge of the teacher, who has a vast educational experience when designing and teaching multiplicative problems with fractions, as well as to associate her reflections on her practice when she teaches those mathematical contents in the classroom. The methodological instruments applied in the tracing of this case were a questionnaire and three individual interviews of a didactic nature with feedback. This paper integrates only the tasks designed by the teacher in third interview that allow to show relevant data of the teaching that the teacher proposed and her corresponding purposes.

Keywords: Fractions, teacher's knowledge, multiplicative problems

Introduction

The relevance of the study of fractions and their operations is that it provides a basis for subsequent algebraic relationships. The understanding of rational numbers is fundamental for the development and management of mathematical ideas. In this sense, the teacher can propitiate suitable situations for the learning of Mathematics and guides the student towards the critical aspects of rational or fractional number knowledge (Kieren, 1988).

The knowledge that teacher owns for the teaching has been the subject of study for several decades. Researchers like Shulman (1986) suggest the importance of observing the transformation of the teacher's knowledge content in the knowledge content of instruction on a given topic. In this sense, Ball (1990) is focused on how teachers think about their pedagogical and mathematical knowledge and reasoning. In this case, we consider that teachers with experience in the class of Mathematics, show wealth in the various strategies and forms of long-term representation through the teaching of multiplicative problems associated with fractions. Derived from the above, we consider the data provided in this report to be relevant because they reveal the commonly inaccessible aspect of a teacher's thinking in usual practice, which allow us to interpret here the underlying thoughts that motivate their decisions; the reflections that arise from solving that tasks and if the awareness of this knowledge contributes to the educative improvement.

The main objective of this research is to identify the mathematic knowledge of in-service teachers, with a vast experience in decision-making situations and tasks design for the teaching of contents related to multiplicative problems about fractions. The questions that guide this study are a) what is the teacher's knowledge for the design and teaching of multiplicative problems linked to fractions? b) What knowledge rise during the thoughtful self-analysis of their teaching practice?

Theoretical framework

Some researchers (Ball, 2000, Ball & Bass, 2000, Ball, Thames & Phelps, 2008, & Smith, Bill, & Raith, 2018) link the relevance of the firm knowledge of the teacher about the subject matter she (he) teaches to the learning opportunities that he (she) can provide to students starting from the understanding what the official curriculum mentions and to adapt the actions scheduled for teaching taking into account the needs of their students.

Hart (1981); Jensen & Hohense (2016); Sharp & Welder (2014) and Tirosh (2000), among other researchers, have contributed to the teaching of fractional numbers and their operations. Their results indicate possible deficiencies in the teaching and students' difficulties to solve this type of problems because operations such as multiplication and division with fractional numbers are based on the use of rules and algorithms, putting aside the ideas or multiplicative relationships to provide their explanations and also the students' tendency to attribute the properties to the operations with natural numbers to the operations with fractional numbers. This is particularly important because we identified the last aspect in association with the designs and conceptions on the own teaching realized by the teacher of present research.

The background of the teaching on fractional numbers leads to the first concepts that Kieren (1983) provided. Such researcher mentions that fractions are made up of subconstructs with four meanings: measure, quotient, reason, and multiplicative operator. These subconstructs are the basis for the knowledge of the rational numbers.

Researchers like Behr, Lesh, Post, & Silver (1983) suggest the importance of representing geometrical regions, sets of discrete objects y numerical line as the most widely used models to represent fractions in the elemental education.

Freudenthal (1983) identifies fraction as fracturer, comparator, and multiplicative operator. We can find fractions in an operator in three discernible modes: fracturing operator, ratio operator, and fraction operator. The fracturing operator is associated with situations where specific objects are acted upon, separating them in equivalent parts. Through the ratio operator, we place two a magnitudes in a ratio, a magnitude correlated to another one. The fraction operator is recognized only in the number domain where it satisfies the need for the inverse of multipliers.

Vergnaud (1983) established conceptual fields and refers to them as problems and situations for the treatment of concepts, procedures, and representations of different types. Two of those conceptual fields that he established play an important role in the present research: additive and multiplication structures, in which the problems involve arithmetic operations. We will focus on the multiplicative structure that incorporates different semantic categories of verbal problems: isomorphism of measures and product of measures.

Methodological Design

This case study was carried out in a public secondary school under regulation of the Ministry of Education (Secretaría de Educación Pública, SEP) in Mexico City. The teacher who participated in our research has a Bachelor's Degree in Mathematics Education. We selected this participant because of the data she provided, her vast didactic and mathematical procedures and concepts, and the great communication she produces through her didactic design.

For data collection, we designed a questionnaire and an individual interview of didactic cut, with feedback supported by Valdemoros (2004) and Valdemoros, Ramírez, & Lamadrid (2015). The purpose of the questionnaire was to identify the knowledge and strategies of three Mathematics teachers when solving multiplicative problems linked to the use of fractional numbers. This instrument allowed us to choose the participant and some tasks of the interview.

The didactic interview with feedback included tasks already solved in the questionnaire to make explicit the thoughts that arise during teaching. The interview was oriented to think about the decisions and cognitive processes linked to the teacher's practice when she favors a strategy one another one; the representations she uses and how she link them to procedures to solve the related tasks with multiplication problems that involve fractional numbers. From this instrument, we took the data to prepare the present communication (whose research process has taken more than a year); we collected it through the application of several didactic interviews with feedback. The validation of interviews results is given through the triangulations of the instruments since different data collection methods will be used to study the posed problem in this research (in a next phase we will incorporate the observation in class, sessions carried out in a brief empirical course with others in-service teachers and new didactic interview with feedback).

Analysis of Results

Next is the relevant data of a previous teaching practice in which the teacher expressed the teaching processes she had utilized in her experience over 20 years. That is, we attempted to identify her teaching knowledge and what emerged from the reflection of her educational practice. We chose a multiplication problem and a division task with fractional numbers. Some fragments of the individual interview are exposed here, which include two tasks previously solved in the questionnaire to feedback on what the teacher does at the time she solves them. For the analysis of data, we considered the contributions Behr et al. (1983); Freudenthal (1983), Kieren (1983, 1988), Valdemoros et al. (2015) and Vergnaud (1983), among other researchers.

The multiplication problem

A rectangular building is on the corner of two streets. One of its fronts occupies a third of a street and the other occupies two-fifths of the other street. How much of the block does the building occupy? This task was taken from Jiménez (2015).

To solve the multiplication problem, the teacher used a pictorial representation (a rectangle); she partitioned it to represent the problem data and shaded it by saying "*Let's divide this front into thirds, we take the third part and from the other side of the fix we are going to divide it into fifth parts and we will take two of them.*" We asked her why she used this type of representation and she emphasized that the region with double shading allowed her to represent the graphic solution to the problem and show the multiplication fractions to students.

Subsequently, the teacher operated with the multiplication algorithm and associated the parts of the figure with the algorithmic answer, expressing: "*the students are going to realize that the result from multiplying the numerators corresponds to the part with double shading and the denominator corresponds the total of parts*. Perhaps the teacher used the pictorial representation to give sense to the operation; however, in this task she did not link the answer to the unit of reference. She focused on the main use of the algorithm, as reported researchers like Hart (1981); Kieren (1988), and Vergnaud (1983), among other researchers.

The inverse of the multiplication problem

A painter will paint a mural on a wall that has an area of $3\frac{1}{4}$ m^2; he knows the length is $2\frac{3}{5}$ m. What is the length of the area of the fence?

During third the interview, the teacher reaffirmed that the pictorial representation allowed her to make explicit to students the association of data of the figure with the formula: "*We know how to obtain the area: by multiplying the base by height over two; students know that from elementary school*". Immediately after, she wrote the formula of the area and substituted the data of the problem represented in the rectangle. She emphasized this strategy to make easier the teaching of this type of situation and said: "*we can find that value by substituting the formula of the area through an inverse operation; in this case is a division of fractions* $3\frac{1}{4} \div 2\frac{3}{5}$*, which will allow us to know the missing value*". The teacher referred to the inverse operation although she expressed it ambiguously (the observer seemed to refer to the notational displacements occurred in an equation), and so she justified the division of fraction.

The knowledge that emerged during the interview refers to the predominant use of rules and algorithms over the meaning of operations according (Hart, 1981), geometric representations as teaching models as stated by Behr et al. (1983), and to link the data to the problem. We also identified the use of fractions in the sense of measure, quotient, and multiplicative operator *indicated by* Kieren (1983).

The teacher suggested simplifying an equation to solve the problem of division; and so she vindicated the use of the rule to divide fractions, leaving aside the meaning of the inverse operation in multiplication as reported in the study by Valdemoros et al. (2015).

Discussion of results

From the data analysis, it is possible to infer that teacher's thoughts and decisions were defined by her teaching experiences, which also permeated her strategies based on her students' learning difficulties about the fractional numbers that she identified through her vast teaching experience. The teacher tried to solve this type of obstacle by embedding the teaching into a practice supported by the use of algorithms and rules that she considered students have strengthened since their passage through elementary school.

The teacher favored the use of a pictorial representation highlighting the area model (associated with calculating the area of the rectangle), which allowed her to justify operations with fractional numbers and link the algorithm to what she represented graphically. However, these representations did not provide enough elements to illustrate the case of division because she only used the geometrical representation to associate the data of the problem with the formula and replace them. She did not justify the meaning of the inverse operation of multiplication. She was based on an equation, as has been previously reported by Valdemoros et al. (2015). She also favored the use of the algorithm over the comprehension of intuitive relationships in which the operating situation was immersed.

References

Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers´understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21(2), 132-144.

Ball, D.L. (2000) Brinding Practices: Interwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher of Education*, 51, 241-247.

Ball, D.L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-114. Westport, CT: Ablex.

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher of Education*, 59(5), 389-407.

Berh, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh and Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concept and Processes*. (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Freudenthal H., (1983). Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Textos seleccionados, México: CINVESTAV.

Hart, K. (1981). Fractions. In Anthony Rowe Publishing (Ed.), *Children´s understanding of mathematics: 11-16 (*pp. 66-81). London: John Murray.

Jiménez, L. (2015). *Matemáticas 1.* México: Grupo Editorial Patria.

Jensen A., & Hohensee, Ch. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers´ conceptions of partitive division with fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 19, 503-522.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational numbers ideas. In M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, y M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 506-508). Boston, EUA: Birkhäuser.

Kieren, T. (1988) Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In J. Hiebert & M. Berh (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp.162-181). Reston, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., & National Council of Teachers of Mathematics.

Sharp, J., & Welder, R. (2014). Reveal limitations through fraction division problem posing. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 19(9), 490-490.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Reseacher,* 15(2), 4-14.
Smith, M., Bill, V. & Raith, M. (2018). Promote a conceptual understanding of mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 24(1), 36-43.
Tirosh, D (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 125-147.
Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 7(3), 235-256. ISSN 1665-2436
Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P. (2015). "Núcleos de significación y pensamiento" en la enseñanza de fracciones. *Comité Interamericano de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas. Vol. 1: Formación Inical para Profesores de Primaria.* Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana
Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press.

LOS PROCESOS COGNITIVOS DE PROFESORES DURANTE LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES Y PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

TEACHERS' COGNITIVE PROCESSES DURING THE TEACHING OF FRACTIONS AND MULTIPLICATIVE PROBLEMS

Marta Ramírez Cruz
Center for Research and Advanced Studies
CINVESTAV
marta.ramirez@cinvestav.mx

Marta Elena Valdemoros Álvarez
Center for Research and Advanced Studies
CINVESTAV
mvaldemo@cinvestav.mx

Esta comunicación sobre el caso de una maestra de secundaria se presenta en el marco de una investigación llevada a cabo con profesores. El propósito es identificar el conocimiento matemático de la maestra con amplia experiencia educativa, cuando realiza el diseño y la enseñanza de problemas multiplicativos ligados a las fracciones, así como vincular las reflexiones que realiza sobre su práctica cuando enseña esos contenidos matemáticos en el aula. Los instrumentos metodológicos aplicados en el seguimiento de este caso fueron un cuestionario y tres entrevistas didácticas individuales con retroalimentación. En el presente reporte se integran sólo tareas diseñadas por la maestra en la tercera entrevista que permiten mostrar datos relevantes de la enseñanza propuesta por la profesora y sus correspondientes propósitos.

Palabras clave: Fracciones, conocimientos del profesor, problemas multiplicativos.

Introducción

La importancia del estudio de las fracciones y sus operaciones reside en que hay un fundamento para las relaciones algebraicas posteriores. La comprensión de los números racionales es básica para el desarrollo y control de las ideas matemáticas, en este sentido, el maestro puede crear situaciones favorecedoras para el aprendizaje de la matemática y orientar al estudiante hacia los aspectos críticos del conocimiento de número racional o fraccionario (Kieren, 1988).

El conocimiento que posee un profesor para la enseñanza ha sido objeto de estudio desde hace varias décadas; investigadores como Shulman (1986) sugieren la importancia de observar la transformación del conocimiento del profesor en el conocimiento de la instrucción sobre un tema determinado, en este sentido Ball (1990) se enfoca en cómo piensan los maestros sobre su conocimiento y el razonamiento matemático y pedagógico. En este caso, consideramos que los docentes con experiencia en la clase de Matemáticas, muestran riqueza en las diversas estrategias y formas de representación prolongadas a través de la enseñanza de problemas multiplicativos ligados a las fracciones. Derivado de lo anterior, consideramos relevantes los datos aportados en este reporte, porque muestran los aspectos comúnmente inaccessibles del pensamiento de un profesor en la práctica habitual, lo cual nos permite presentar aquí los pensamientos subyacentes que motivan sus decisiones, las reflexiones que surgen ante la resolución de dichas tareas y si la toma de conciencia de esos saberes coadyuva a la mejora educativa.

El objetivo general de la investigación es identificar los conocimientos matemáticos de profesores en ejercicio con amplia experiencia ante situaciones de toma de decisiones y diseño de tareas para la enseñanza de contenidos relacionados a problemas multiplicativos acerca de las fracciones. Las preguntas que guían el presente estudio son: a*) ¿Cuáles son los conocimientos que posee el profesor para el diseño y la enseñanza de problemas multiplicativos ligados a las fracciones?, b) ¿Qué conocimientos emergen durante el autoanálisis reflexivo de su propia práctica docente?*

Marco Teórico

Algunos investigadores (Ball, 2000, Ball y Bass, 2000, Ball, Thames y Phelps, 2008 y Smith, Bill y Raith, 2018), vinculan la importancia de los conocimientos sólidos del profesor acerca de la materia que enseña y las oportunidades de aprendizaje que puede brindar a los estudiantes a partir de entender lo que menciona el curriculum oficial y hacer una adaptación de las acciones programadas para la enseñanza tomando como referente las necesidades de sus alumnos.

Investigadores como Hart (1981); Jensen y Hohense (2016); Sharp y Welder (2014), y Tirosh (2000), entre otros, han realizado aportaciones a la enseñanza de números fraccionarios y sus operaciones. Sus resultados apuntan a posibles carencias de la enseñanza y dificultades por parte de los estudiantes para resolver este tipo de problemas, debido a que operaciones como la multiplicación y división con números fraccionarios se sustentan con el uso de reglas y algoritmos, dejando de lado las ideas o relaciones multiplicativas para proporcionar sus explicaciones, tanto como la posible tendencia de los estudiantes a atribuir propiedades de operaciones de números naturales a las operaciones con números fraccionarios. Esto es particularmente importante porque los últimos aspectos los identificamos en asociación con los diseños y las concepciones sobre la propia enseñanza realizada por la profesora participante en esta investigación.

La enseñanza de números fraccionarios tiene antecedentes en los primeros conceptos aportados por Kieren (1983). Dicho investigador menciona que las fracciones están constituidas por subconstructos con cuatro significados: medida, cociente, razón y operador multiplicativo, estos subconstructos forman las bases del conocimiento de número racional.

Investigadores como Behr, Lesh, Post y Silver (1983) sugieren la importancia de la representación de regiones geométricas, conjuntos de objetos discretos y la recta numérica como los modelos más utilizados para representar fracciones en la educación elemental.

Freudenthal (1983) identifica la fracción como fracturador, comparador y operador. La fracción en un operador que se encuentra en tres modalidades discernibles: operador fracturante, operador razón y operador fracción. El operador fracturante se asocia con situaciones en las que se actúa sobre objetos concretos, rompiéndolos en partes equivalentes; mediante el operador razón colocamos las magnitudes en una razón: una con respecto a otra; el operador fracción actúa sobre el puro dominio del número, donde satisface la necesidad de inverso de los multiplicadores.

Por otra parte, Vergnaud (1983) establece campos conceptuales y se refiere a ellos como los problemas y situaciones para el tratamiento de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos. Establece dos campos conceptuales como principales para esta investigación, estructuras aditivas y multiplicativas, en donde los problemas involucran operaciones aritméticas.

Para el trabajo interesan las estructuras multiplicativas, las que integran distintas categorías semánticas de problemas verbales: isomorfismo de medidas y producto de medidas.

Diseño Metodológico

Este estudio de caso se realizó en una escuela secundaria que pertenece a la Secretaría de Educación Pública en la Ciudad de México, participó una profesora con una Licenciatura en Educación Matemática. Elegimos a esta participante debido a la relevancia de los datos que ella aporta, la amplia experiencia didáctica y matemática que posee y lo mucho que comunica en sus diseños didácticos.

Para la recopilación de datos, diseñamos un cuestionario y una entrevista individual de corte didáctico con retroalimentación sustendada por Valdemoros (2004) y Valdemoros, Ramírez y Lamadrid (2015). El propósito del cuestionario fue identificar los conocimientos y estrategias de tres profesores de Matemáticas al resolver problemas multiplicativos vinvulados al uso del número fraccionario, este instrumento nos permitió elegir a la profesora y de él derivamos algunas tareas a la entrevista.

La entrevista didáctica con retroalimentación incluyó tareas ya resueltas en el cuestionario con la finalidad de hacer explícitos los pensamientos que surgen durante la enseñanza. La entrevista estuvo orientada a reflexionar sobre las decisiones y procesos cognitivos vinculados a la práctica de la maestra cuando privilegia una estrategia sobre otra; las representaciones que utiliza y cómo las vincula con los procedimientos para resolver tareas relacionadas con problemas multiplicativos donde involucra números fraccionarios. De este intrumento tomamos los datos para elaborar la presente comunicación (proceso de investigación que ha llevado más de un año); los recopilamos mediante la aplicación de varias entrevistas didácticas con retroalimentación. La validación de los resultados se da a través de la triangulación de los instrumentos ya que se van a utilizar diferentes métodos de recogida de datos para estudiar el problema planteado en esta investigación (en una etapa próxima agregaremos la observación de clase, sesiones en un breve curso empírico con profesores en servicio y una entrevista adicional con retroalimentación).

Análisis de Resultados

A continuación mostramos datos relevantes de la práctica docente precedente, donde la profesora manifiesta procesos de enseñanza ejercidos en su experiencia durante más de 20 años. Tratamos de identificar los conocimientos para la enseñanza que ella posee y lo que surge a partir de la reflexión de su práctica educativa. Hemos seleccionado para este reporte un problema de multiplicación y otro de división de números fraccionarios. Se presentan fragmentos de la entrevista individual, en donde se incluyen dos tareas ya resueltas con anterioridad en el cuestionario, con la finalidad de ir retroalimentando lo que la profesora hacía mientras las resolvía. Para el análisis de datos consideramos las aportaciones de Behr et al. (1983); Freudenthal (1983); Kieren (1983, 1988); Valdemoros et al. (2015) y Vergnaud (1983), entre otros investigadores.

El problema de la multiplicación

Un edificio de planta rectangular hace esquina con dos calles. Uno de sus frentes ocupa un tercio de una calle, y el otro frente ocupa dos quintos de la otra calle. ¿Qué parte de la manzana está ocupada por el edificio? Tarea tomada de Jiménez (2015).

Para resolver el problema de multiplicación la profesora utilizó una representación pictórica (el rectángulo), realizó particiones para representar los datos del problema y los sombreó diciendo:“ *vamos a dividir este frente en tercios, tomando una tercera parte y el otro lado del arreglo rectangular lo vamos a dividir en quintas partes de las cuales vamos a tomar dos*”; cuestionamos la razón de ese tipo de representación, ella hizo énfasis en que la región con doble sombreado le permitía representar la solución gráfica del problema y mostrar a los estudiantes la multiplicación de fracciones.

Posteriormente, la profesora realizó la operación con el algoritmo de multiplicación y relacionó las partes de la figura con la respuesta algorítmica expresando: *"los estudiantes van a darse cuenta de que el resultado de multiplicar los numeradores es la parte con doble sombreado y el denominador corresponde al total de las partes"*. Posiblemente, la profesora utilizó la representación pictórica para dar sentido a la operación, sin embargo, no relacionó la respuesta con la unidad de referencia, se enfocó en el uso preponderante del algoritmo, situación reportada por Hart (1981); Kieren (1988) y Vergnaud (1983), entre otros investigadores.

Problemas del inverso de la multiplicación

Un pintor va a realizar un mural en una pared que tiene un área de $3\frac{1}{4}$ m^2, sabe que de largo mide $2\frac{3}{5}$ m. ¿Cuánto mide la longitud que corresponde al ancho de la barda?

Durante la tercera entrevista, la profesora reiteró que la representación pictórica le permite explicitar a sus estudiantes la asociación de los datos de la figura con la fórmula: *"sabemos que el área se obtiene multiplicando la base por la altura, eso lo saben desde la primaria"*. Inmediatamente ella escribió la fórmula del área, sustituyendo los datos del problema representados en la figura geométrica (rectángulo), hizo énfasis en esta estrategia para facilitar la enseñanza de este tipo de situaciones y agregó: *"podemos conocer ese valor en la sustitución de la fórmula del área a través de una operación inversa que en este caso es una división de fracciones $3\frac{1}{4} \div 2\frac{3}{5}$, nos va a permitir conocer el valor que hace falta*", la maestra hizo referencia a tal operación inversa, aunque lo expresó de un modo ambiguo, ya que a los ojos de la observadora parecía referirse a los desplazamientos notacionales generados en una ecuación, con esta acción justificó la división de fracciones.

Los conocimientos presentes en la entrevista se refieren al uso preponderante de reglas y algoritmos sobre el sentido de las operaciones según Hart (1981), el uso de representaciones geométricas como modelos de enseñanza conforme a lo planteado por Behr et al. (1983), y para relacionar los datos del problema. Identificamos el uso de la fracción con el significado de medida, cociente y operador de acuerdo a Kieren (1983).

Un pasaje importante de la entrevista es el momento en que la profesora sugiere el despeje de una ecuación para resolver el problema de división, con lo anterior la maestra justifica el uso de la regla para dividir fracciones, dejando de lado el significado de la operación inversa de la multiplicación como se ha reportado con anterioridad (Valdemoros et al., 2015)

Discusión de resultados

Con el análisis de datos, es posible suponer que los pensamientos y decisiones de la profesora estaban definidas por su experiencia de enseñanza que también impregnaron sus estrategias basadas en las dificultades de aprendizaje de sus estudiantes sobre los números fraccionarios identificados a través de su vasta experiencia de enseñanza. La maestra trató de resolver este tipo de obstáculo integrando la enseñanza en una práctica respaldada por el uso de los algoritmos y reglas que a su consideración los estudiantes tenían afianzados desde su paso por la escuela primaria.

La profesora privilegió el uso de la representación pictórica destacando el modelo del área (asociado al cálculo del área del rectángulo), el cual le permitió justificar las operaciones con números fraccionarios y relacionar el algoritmo con lo que realizó gráficamente. Sin embargo, estas representaciones no aportaron los elementos suficientes para ilustrar el caso de la división, porque sólo utilizó la representación geométrica para asociar los datos del problema con la fórmula y sustituirlos, no justificó el significado de la operación inversa de la multiplicación, se apoyó en despejar una ecuación, como se ha reportado con anterioridad Valdemoros et al. (2015). Asimismo, favoreció el uso del algoritmo sobre la comprensión de las relaciones intuitivas en la que estaba inmersa la situación operatoria.

Referencias Bibliográficas

Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers´ understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21(2), 132-144.

Ball, D.L. (2000) Brinding Practices: Interwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher of Education*, 51, 241-247.

Ball, D.L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-114). Westport, CT: Ablex.

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher of Education*, 59(5), 389-407.

Berh, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh and Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concept and Processes*. (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Freudenthal H., (1983). Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Textos seleccionados, México: CINVESTAV.

Hart, K. (1981). Fractions. En Anthony Rowe Publishing (Ed.), *Children´s understanding of mathematics: 11-16 (*pp. 66-81). London: John Murray.

Jiménez, L. (2015). *Matemáticas 1.* México: Grupo Editorial Patria.

Jensen A., & Hohensee, Ch. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers´ conceptions of partitive division with fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 19, 503-522.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational numbers ideas. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, y M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 506-508). Boston, EUA: Birkhäuser.

Kieren, T. (1988) Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert & M. Berh (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp.162-181). Reston, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., & National Council of Teachers of Mathematics.

Sharp, J., & Welder, R. (2014). Reveal limitations through fraction division problem posing. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 19(9), 490-490.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Reseacher,* 15(2), 4-14.

Smith, M., Bill, V. & Raith, M. (2018). Promote a conceptual understanding of mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 24(1), 36-43.

Tirosh, D (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 125-147.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 7(3), 235-256. ISSN 1665-2436.

Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P. (2015). "Núcleos de significación y pensamiento" en la enseñanza de fracciones. *Comité Interamericano de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas. Vol. 1: Formación Inical para Profesores de Primaria.* Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press.