

THE ALLOCATION OF SENSE TO THE QUOTATIVE DIVISION OF FRACTIONS

LA ASIGNACIÓN DE SENTIDO A LA DIVISIÓN CUOTATIVA DE FRACCIONES

Angel Totolhua-Tlaque
Cinvestav-IPN
atotolhua@cinvestav.mx

Marta Elena Valdemoros
Cinvestav-IPN
mvaldemo@cinvestav.mx

This research paper is part of a doctoral study under development. In this research report, we analyze the cognitive and operative processes that first graders in secondary school perform in assignments involving division of fractions. The study includes some contributions from researchers who have adopted the problem solving about division of fractions tasks through the quotative model, as well as the use of different levels for coordination of units proposed by Hackenberg (2007). Tasks here presented include problems solving through canonical and pictorial algorithms, and form part of a questionnaire that was thoroughly analyzed, by contrasting the arithmetic-symbolic notations and the expressions of the language.

Keywords: Division of fractions, canonical and pictorial algorithm.

Introduction

In the semantic analysis carried out in this research report focused on measuring how much a part fits in the given hole, that Fischbein, Deri, Sainati, Sciolis (1985) called a quotative model of division and recognized the pictorial algorithm by Kieren (1985), we intend to make sense of dividing fractional numbers using a didactic support that makes feasible its comprehension and achieves good results in the applied tasks; otherwise, if only the canonical algorithm is applied the operation of division of fractions will be mechanic. This situation is illustrated below with an example.

Operations that students carry out can not be restricted to operational-algorithm use of fractional number; on the contrary, we intend that they help to achieve a semantic interpretation through a pictorial algorithm proposed in each task. We consider that the use of the pictorial algorithm is substantial in the present research work because through it we can observe the steps students follow when facing diverse problematic situations posed and there is no doubt about first graders' competency in Telesecondary schools (an educational modality in Mexico that is taught to the most remote places through television images) to solve tasks in which division of fraction is involved within the quotative model.

Research question and objectives

Mexican students' assessments in secondary school are applied through an official test called Early Warning System (Sistema de Alerta Temprana-Sisat, 2018). For now, results are not quite positive for first graders in Telesecondary modality, which take us to investigate which are the performance and strategies students use to face problematic situations that involve the quotative division of fractions?

General aim:

Identify through the pictorial algorithm, the different strategies used by that first graders in Telesecondary to give sense to the quotative division of fractions to understand why it is divided, by recognizing how much a fraction fits in another fraction.

Theoretical framework

Rational numbers have been a fairly broad research topic around the world, just to mention some of the most outstanding authors such as Kieren (1983), who define several subconstructs to understand the meaning of fractional numbers. Streefland (1991) highlights realistic models where operational and conceptual operation of rational numbers is necessary. Vergnaud (1988) came up with theorems in action, which will help us to analyze the students' conceptual difficulties when solving the proposed tasks. Fischbein et al. (1985) defines the quotative division that is essential in the present research work. Tirosh (2000) emphasizes the semantic and operative elements that required to solve a division of fraction task, but much students lack them. Valdemoros (2004) points out how semantic contents are vital to achieve the transition from natural language to an arithmetic language, all which is necessary to define with considerable accuracy regarding quotative division of fractions.

Students' limitations regarding the division of fractions have been documented over the last decades, as well as those limitations that the in-service teachers also show, as Izsák (2012) reports, who express how most of in-service teachers can solve tasks involving division of fractions through a canonical algorithm, but they have serious difficulties to solve such tasks when this type of number appears in problematic situations in the division of fractions. This situation also occurs in secondary students. Izsák (2012) shows a task from Armstrong & Bezuk (1995), in which teachers accepted that the required situation to solve it was a multiplication of fractions, but when asked to explain their thought or draw diagrams to unify the algorithmic-canonical result to that of pictorial one (by using geometric representations) and understand what kind of unit were using in each case, teachers showed many difficulties to recognize their cognitive conflicts, this situation that also arises in secondary students and it is one of the fundamental reasons that lead us to investigate about such problematic.

To construct a quotative model for dividing fractional numbers, the different levels of unit coordinations proposed by Hackenber (2007) are taken into account; although, the focus of the paper is the construction of improper fractions, its original contributions of how students carry out the coordination of different levels of units for the construction of proper fractions is fundamental to this research work.

The correct identification of appropriate reference units (Schwartz, 1988) for each fraction is fundamental for solving tasks that involve the division of fractions; and the coordination of unit structures in the three levels mentioned in the previous paragraph, are essential for understanding the mathematical knowledge, all of this through drawing geometric models, diagrams and other pictorial elements that students use to appropriate the arithmetic of rational numbers.

Method

Participants

There were 28 first graders belonging to a scholar group which we applied a questionnaire in a Telesecondary school located on the boundary of the state capital of Puebla. The school was selected because the teacher of the group showed great interest in the didactic treatment about knowledge of fractional numbers.

Socio-Cultural Situation

The school has 198 students divided into six groups (2 groups for each grade). The school has the Service and Support Unit for Regular Education, what is in charge to assist students with low school achievement; it also has institutional support resources such as the Internet, food service, psychological attention, library, civic and sports activities.

Methodological instruments

We designed a questionnaire for the first graders in Telesecundaria. It consisted of eight tasks that involved mathematical problems about the division of fractions. For each task, we provided two ways of solving it, canonical and pictorial algorithms (tasks should be solved in both ways). The following is one of the tasks: How many parts of $\frac{1}{2}$ meter of a wooden board can I obtain in 2 wooden boards if each board measures 2 meters? Toño achieved the first result through the canonical algorithm. He operated $2 \div \frac{1}{2} = 4$ parts in each wooden board. The second solution came through the pictorial algorithm; Pepe represented his operation with two rectangular figures divided into four parts each and said $\frac{1}{2}$ meter of wood fits 4 times in each wooden board. Students solved another task equal to the previous explained, but the fraction unit was $\frac{1}{3}$.

Analysis of collected data

In this research paper, we consider those answers that used both models of solving because from these models we can build appropriated meanings for the operations the students carried out, in particular the quotative meanings. Andrea's answer was right. In her first answer, she operated $2/1 \div 1/3 = 6/1 = 6$. In her second answer, she drew two rectangular figures divided into 3 parts each one, so her answer to the task was: 6 parts.

As we can observe in Andrea's answer, she formed a structure of two levels of unit coordination, where a two-unit range is divided into three equal parts. This answer allowed us to determine that Andrea understood the quotative meaning of the division of fractions by using two levels of unit coordination.

Results

The students could solve tasks in the questionnaire by using those strategies they considered appropriate; however, when the solution involves the use of the pictorial algorithm this allows us to determine in which moment and circumstances students constructed the different levels of unit coordination, which in turn allows us to know if the reasoning used is correct or there are some deficiencies in their development.

The students in first grade gave only one answer through the canonical algorithm. They had difficulties to explain each of their answers, though they were correct, their interpretation of results was unreliable and their oral explanations were inconsistent. So, the didactic interview with feedback (Valdemoros, 2004, Valdemoros, Ramirez and Lamadrid, 2015) and the group interview (Werscht, 1993), which will be carried out soon, will be of great help in clarifying the students' conceptualizations that participate in this research.

Conclusions

The first graders' performance in the Telesecondary modality can be observed in the tasks included in the questionnaire; unfortunately, results are a little favorable because most of the students tried to solve tasks by changing the fractional numbers to decimal numbers. Others seemed not to have previous knowledge regarding the pictorial algorithm, which at the end was inconvenient and in some cases caused serious conflicts of interpretation of the proposed tasks. To solve these inconveniences, we propose to carry out a series of didactic interviews with feedback (also described as a didactic interview) applied to some of the students in first grade as well as to apply a group interview in the following phase of the research. Currently, the theoretical-methodological and empirical design of the collective interview is in process.

References

- Armstrong, B. E., & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 85-119). Albany, NY: State University of New York Press.
- Fischbein, E., Deri, M., Sainati, M., Sciolis, M. (1985). The Role of Implicit in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.
- Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*; 26, 27-47.
- Izsák, A., Jacobson, Erik, and Araujo, Zandra de. (2012). Measuring Mathematical Knowledge for Teaching Fractions With Drawn Quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43, 391-427.
- Kieren, T. E. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. (pp. 506-525).
- Kieren, T. E. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks Partitioning, Equivalence. *The Journal of Mathematical Behavior*. 4, 25-36.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 125-147.
- Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Streefland, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education. Doctoral Dissertation. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Valdemoros, M. (2004) Lenguaje, fracciones y reparto. In: *Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.* Vol. 7, 3, 235-256.
- Valdemoros, M.E., Ramírez, M.M.E & Lamadrid, P. (2015). "Núcleos de significación y pensamiento" en la enseñanza de fracciones. In: *Educación Matemática en las Américas 2015*. Vol. 1, 195-204.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141- 161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wertsch, J.V. (1993). Sociocultural Setting, Social Languages, and Mediated action. In James V. Wertsch. *Voices of the mind: a sociocultural approach to mediated action* (pp. 119-148). Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts.
- Secretaría de Educación Pública (2018). Sistema de Alerta Temprana (SISAT). (01-05-2019) Recovered from [Http://dgdge.sep.gob.mx/sisat/](http://dgdge.sep.gob.mx/sisat/)

LA ASIGNACIÓN DE SENTIDO A LA DIVISIÓN CUOTATIVA DE FRACCIONES

THE ALLOCATION OF SENSE TO THE QUOTATIVE DIVISION OF FRACTIONS

Angel Totolhua-Tlaque
Cinvestav-IPN
atotolhua@cinvestav.mx

Marta Elena Valdemoros
Cinvestav-IPN
mvaldemo@cinvestav.mx

El presente trabajo de investigación forma parte de un estudio doctoral en desarrollo; en este reporte de investigación analizamos los procesos cognitivos y operatorios que presentan los alumnos de primero de secundaria para realizar tareas en las que se involucra la división de fracciones. En el estudio se incluyen aportaciones de investigadores que adoptan la resolución de tareas de división de fracciones por medio del modelo cuotativo, así como la utilización de los distintos niveles de coordinación de unidades propuestos por Hackenberg (2007). Las tareas que se presentan en este estudio incluyen la resolución de problemas por medio de los algoritmos canónico y pictórico. Dichas tareas fueron integradas en un cuestionario, el cual se analizó de forma exhaustiva, por medio del contraste entre las notaciones aritmético-simbólicas y las expresiones de la lengua que acompañaron a las primeras.

Palabras clave: División de fracciones, algoritmos canónico y pictórico.

Introducción

El análisis semántico realizado en el presente documento de investigación se centra en la medición del cuánto cabe una parte en el todo dado, denominado por Fischbein, Deri, Sainati, Sciolis (1985) como modelo cuotativo, a través del algoritmo pictórico (Kieren, 1985), con el cual pretendemos otorgar sentido a la división de números fraccionarios, dando un tratamiento didáctico que facilite su comprensión y la obtención de buenos resultados en las tareas a resolver; ya que si sólo se aplica el algoritmo canónico estaremos haciendo mecánica la operación de división de fracciones, más adelante se ilustra con un ejemplo esta situación.

Las operaciones realizadas por los alumnos no pueden quedar restringidas al uso operacional-algorítmico de los números fraccionarios, sino por el contrario, se pretende que puedan facilitar una interpretación semántica por medio del algoritmo pictórico propuesto en cada una de las tareas a realizar. Consideramos que el manejo del algoritmo pictórico es substancial en el presente trabajo de investigación, ya que a través de él podemos observar los pasos que sigue cada estudiante ante las diversas situaciones problemáticas planteadas, y no dudamos de la capacidad de los alumnos de primero de telesecundaria (modalidad educativa en México que se imparte hasta los lugares más alejados, a través de imágenes televisivas) para resolver las tareas en las que se involucra la división de fracciones, a través del modelo cuotativo.

Pregunta de investigación y objetivos

La evaluación que se elabora en México para los alumnos de secundaria se realiza a través de la prueba oficial denominada Sistema de Alerta Temprana (Sisat, 2018), los resultados obtenidos hasta ahora son poco favorables en los alumnos de primero de telesecundaria, lo que nos permite preguntar, ¿cuál es el desempeño y las estrategias que utilizan los alumnos de primero de telesecundaria frente a situaciones problemáticas en las que se involucra la división cuotativa de fracciones?

Objetivo general:

Identificar, por medio del algoritmo pictórico, las distintas estrategias que utilizan los alumnos de primero de telesecundaria para otorgar sentido a la división cuotativa de fracciones para comprender por qué se divide, a través de reconocer cuánto cabe una fracción en otra fracción.

Marco teórico

Los números racionales han tenido un tratamiento de investigación bastante amplio alrededor del mundo, con autores muy reconocidos de distintos países, sólo por mencionar algunos de los más destacados como Kieren (1983), define a lo que llama subconstructos para entender las significaciones de los números fraccionarios. Streefland (1991) destaca los modelos realistas en los que es necesario el manejo operativo y conceptual de los números racionales. Vergnaud (1988) propone los teoremas en acción, los cuales nos servirán para analizar las dificultades conceptuales de los alumnos al resolver las tareas propuestas. Fischbein et al. (1985) define la división cuotativa que es central en este trabajo de investigación. Tirosch (2000) hace énfasis en los elementos conceptuales y operatorios que necesitan los estudiantes para resolver una tarea de división de fracciones, pero que en muchas ocasiones carecen de ellos. Valdemoros (2004) señala cómo los contenidos semánticos son de vital importancia para realizar la transición del lenguaje natural al lenguaje aritmético, lo cual en nuestro estudio es necesario definir con la mayor claridad respecto a la división cuotativa de fracciones.

Las limitaciones de los alumnos de secundaria con respecto a la división de fracciones se han documentado durante las últimas décadas, así como las limitaciones que tienen también los futuros profesores como lo reporta Izsák (2012), quien identifica cómo la mayoría de los maestros en servicio pueden resolver tareas en las que se involucra la división de fracciones a través del algoritmo canónico y, sin embargo, tienen serias dificultades para resolver dichas tareas cuando este tipo de números se presentan en situaciones problemáticas de división de fracciones, esta misma situación se presenta en alumnos de secundaria. Izsák (2012) propone una tarea extraída de Armstrong y Bezuk (1995), en la cual los maestros reconocieron que la situación requerida para resolverla era una multiplicación de fracciones, pero cuando se les solicitó que explicaran sus pensamientos o dibujaran diagramas para unificar la solución algorítmica-canónica con la pictórica (mediante el uso de representaciones geométricas) y comprender qué tipo de unidad se estaba utilizando en cada caso de la situación problemática, presentaron muchas dificultades para reconocer sus conflictos cognitivos, circunstancia que se presenta también en los alumnos de secundaria y es uno de los motivos fundamentales que nos llevaron a indagar sobre esta difícil problemática.

El modelo cuotativo de división de números fraccionarios se realiza aquí tomando en consideración los distintos niveles de coordinación de unidades propuestos por Hackenberg (2007), aunque el foco de atención del artículo es la construcción de fracciones impropias, es central en este trabajo de investigación su aportación original de cómo los estudiantes realizan la coordinación de los distintos niveles de unidades para la construcción de fracciones propias.

La correcta identificación de unidades de referencia (Schwartz, 1988) apropiadas para cada fracción es fundamental para la resolución de las tareas que implican división de fracciones, y la coordinación de estructuras de unidades en los tres niveles mencionados en el párrafo anterior, son esenciales para la comprensión del conocimiento matemático, todo esto a través de modelos geométricos dibujados, esquemas, y demás elementos pictóricos que utilizan los alumnos para apropiarse de la aritmética de los números racionales.

Método

Participantes

Se aplicó un cuestionario a 28 alumnos de primero de telesecundaria ubicada en la periferia de la capital del Estado de Puebla, la escuela fue seleccionada porque la maestra titular del grupo muestra gran interés por la apropiación de conocimientos de los números fraccionarios.

Entorno socio-cultural

La escuela seleccionada tiene un total de 198 alumnos repartidos en seis grupos (2 grupos de cada grado), cuenta con una Unidad de Servicio y Apoyo a la Educación Regular, la cual se encarga de atender a los alumnos que presentan bajo aprovechamiento escolar. La institución dispone además de recursos de apoyo institucional como: servicio de internet, comedor, asistencia psicológica, biblioteca escolar y de grupo, actividades cívicas y deportivas.

Instrumentos metodológicos

Se aplicó un cuestionario a los alumnos de primero de telesecundaria, con ocho tareas en las que se involucraban situaciones problemáticas de división de fracciones; en cada una de las tareas se proporcionaron dos formas de solución, los algoritmos canónico y pictórico (ambas debían ser resueltas). La tarea propuesta fue la siguiente: ¿cuántas partes de $1/2$ de metro de tabla de madera, puedo obtener en 2 de tablas de madera, si cada tabla mide 2 metros? La primera solución se presentó por medio del algoritmo canónico, Toño realizó la operación de $2 \div 1/2 = 4$ partes en cada una de las tablas. La segunda solución se expuso a través del algoritmo pictórico, Pepe representó su operación

con dos figuras rectangulares divididas en 4 partes cada una y dijo $1/2$ metro de madera cabe 4 veces en cada una de las tablas. La tarea a realizar por los alumnos fue la misma que se expuso al principio del párrafo, solo se modificó la fracción unitaria a $1/3$.

Análisis de datos recopilados

La postura del presente trabajo de investigación es tomar en cuenta aquellas respuestas que utilizaron los dos modelos de solución propuestos en el ejemplo, ya que a partir de estos modelos podemos construir significados apropiados para las operaciones realizadas por los alumnos, en especial los significados cuotativos. La respuesta de la alumna Andrea fue correcta, ya que su primera respuesta fue realizar la operación de $2/1 \div 1/3 = 6/1 = 6$. La segunda respuesta de Andrea fue dibujar dos figuras rectangulares divididas en 3 partes cada una, por lo que su respuesta a la tarea fue: 6 partes.

Como se observa en la respuesta de Andrea, forma una estructura de dos niveles de coordinación de unidades, en la que un intervalo de dos unidades se divide en tres partes iguales; esta respuesta nos permite determinar que Andrea entendió el significado cuotativo de la división de fracciones, utilizando dos niveles de coordinación de unidades.

Resultados

Los alumnos pueden resolver las tareas propuestas en el cuestionario aplicado utilizando las estrategias que consideren más apropiadas, sin embargo, cuando la solución implica la utilización del algoritmo pictórico nos permite clarificar en qué momento y circunstancias se apropian de los diferentes niveles de coordinación de unidades, lo que a su vez nos permite conocer si el razonamiento utilizado es correcto o si tienen algunas deficiencias en su apropiación.

Los alumnos que solamente dan una respuesta a través del algoritmo canónico, tienen serias dificultades para explicar cada una de sus respuestas, ya que aunque tengan una solución correcta, su interpretación del resultado es poco confiable y su explicación verbal tiene muchas inconsistencias, por lo que la entrevista didáctica y con retroalimentación (Valdemoros, 2004, Valdemoros, Ramirez y Lamadrid, 2015) y la entrevista colectiva (Werscht, 1993), a realizar próximamente, serán de gran ayuda en el esclarecimiento de las conceptualizaciones de los alumnos seleccionados.

Conclusiones

El desempeño de los alumnos de primero de telesecundaria se ve reflejado en las tareas propuestas en el cuestionario aplicado, desafortunadamente los resultados son poco favorables, debido a que la mayoría de los alumnos intentó resolver las tareas cambiando los números fraccionarios a números decimales y otros, al parecer, no tenían conocimientos preliminares concernientes al algoritmo pictórico, lo que a la postre resultó inconveniente y en algunos casos causó graves conflictos de interpretación de las tareas propuestas. Para resolver este tipo de inconvenientes, se propone una serie de entrevistas didácticas y con retroalimentación (también descrita como entrevista didáctica) para llevar a cabo en la siguiente fase de la investigación con algunos alumnos seleccionados, así como la aplicación de una entrevista colectiva. El diseño teórico-metodológico y empírico de la entrevista colectiva se está elaborando actualmente.

Referencias

- Armstrong, B. E., & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 85-119). Albany, NY: State University of New York Press.
- Fischbein, E., Deri, M., Sainati, M., Sciolis, M. (1985). The Role of Implicit in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.

- Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*; 26, 27-47.
- Izsák, A., Jacobson, Erik, and Araujo, Zandra de. (2012). Measuring Mathematical Knowledge for Teaching Fractions With Drawn Quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43, 391-427.
- Kieren, T. E. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. (pp. 506-525).
- Kieren, T. E. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks Partitioning, Equivalence. *The Journal of Mathematical Behavior*. 4, 25-36.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 125-147.
- Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Streefland, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education. Disertacion Doctoral. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Valdemoros, M. (2004) Lenguaje, fracciones y reparto (pp. 235-256). En: *Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.* Vol. 7, Núm. 3.
- Valdemoros, M.E., Ramírez, M.M.E & Lamadrid, P. (2015). "Núcleos de significación y pensamiento" en la enseñanza de fracciones. *Educación Matemática en las Américas 2015*. Vol. 1 (pp. 195-204).
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141- 161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wertsch, J.V. (1993). Sociocultural Setting, Social Languages, and Mediated action. In James V. Wertsch. *Voices of the mind: a sociocultural approach to mediated action* (pp. 119-148). Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts.
- Secretaría de Educación Pública (2018). Sistema de Alerta Temprana (SISAT). (01-05-2019) Recuperado de [Http://dgdge.sep.gob.mx/sisat/](http://dgdge.sep.gob.mx/sisat/)