FIRST FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS: HOW DO ENGINEERING STUDENTS INTERPRET AND APPLY IT?

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO: ¿CÓMO LO INTERPRETAN Y APLICAN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA?

Omar Arenas Bonifacio
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
omar.arenas@cinvestav.mx

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
esanchez@cinvestav.mx

Palabras clave: Teorema fundamental del cálculo, Razonamiento, Método comparativo constante.

The first fundamental theorem of calculus relates differential and integral calculus, one of its important aspects according to Bressoud (2011) is that it shows the existence of two ways of calculating an integral: with the limit of a Riemann sum and by an antiderivative. Larsen, Marrongelle, Bressoud and Graham (2017) indicate that calculus is a barrier to the academic progress of many students and that there is a need for research that seeks to develop proposals for instruction to improve the understanding of its concepts. Therefore, with the idea of carrying out this type of research in the future, the present study seeks to identify the common interpretation of the first theorem of calculus and whether it is useful in solving contextual problems. Answering these questions will provide some elements to develop a proposal for instruction.

This study involved 18 students between the ages of 18 and 21 from engineering careers at a university located in Mexico City, who had completed a calculus course. The instrument was a set of three problems, in two, we propose contextual situations that can be solved by applying the first fundamental theorem of the calculus or by performing integration and derivation operations (one situation is about the ratio of change of the volume of water contained in a tank, with respect to time, where water falls to a variable ratio; the other is about the ratio of change of the volume of water contained in a cylindrical tank with respect to the height of water). In the last problem, the same type of situation is posed in abstract form: If $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, obtain $F'(x)$, justify your answer.

The application of the instrument was done in a university classroom, participants were provided with the set of problems and paper sheets to write down their answers and were given 45 minutes to answer them. An analysis of students' responses to the problems was carried out using constant comparative method to form different categories, from which, one of the conclusions obtained is the following:

The common interpretation of the first fundamental theorem of calculus is that it establishes that integration and derivation are inverse operations, since in 71% of the answers of the shown problem (for which only 14 answers were given) used this argument. However, in 50% of these responses, mistakes are made by misusing notation when "cancelling" the inverse operations. This situation suggests that students, when applying the first fundamental theorem of calculus in the mentioned way, present a pseudo-conceptual behavior, (concept proposed by Vinner (1997)); since the way they proceed (making mistakes with the notation when "cancelling" the operations of integration and derivation when they appear together) seems to be linked to the algebraic representation of the situation ($\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$), not based on the concepts involved.

References

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *The American Mathematical Monthly, 118*(2), 99-115.

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: frameworks and roadmaps emerging from educational research. En J. Cai (Ed.), *The compendium for research in mathematics education* (pp. 526-580). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudoanalytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics,* 34, 97–129.

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO: ¿CÓMO LO INTERPRETAN Y APLICAN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA?

FIRST FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS: HOW DO ENGINEERING STUDENTS INTERPRET AND APPLY IT?

Omar Arenas Bonifacio
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
omar.arenas@cinvestav.mx

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
esanchez@cinvestav.mx

Palabras clave: Teorema fundamental del cálculo, Razonamiento, Método comparativo constante.

El primer teorema fundamental del cálculo relaciona el cálculo diferencial e integral, uno de sus aspectos importantes según Bressoud (2011) es que muestra la existencia de dos maneras de calcular una integral: con el límite de una suma de Riemann y con una antiderivada. Además, señala que se trata de un tema conceptualmente complejo. Larsen, Marrongelle, Bressoud y Graham (2017) indican que el cálculo es una barrera para el progreso académico de muchos estudiantes y que hace falta investigación que busque desarrollar propuestas de instrucción para mejorar la comprensión de sus conceptos, por lo que con la idea de realizar en un futuro una investigación de este tipo, se realiza el presente estudio buscando identificar cuál es la interpretación común que tienen los estudiantes sobre el teorema fundamental del cálculo y si ésta resulta útil al resolver problemas contextuales. Contestar estas preguntas aportará algunos elementos para desarrollar una propuesta de instrucción.

En este estudio participaron 18 estudiantes de entre 18 y 21 años de las carreras de ingeniería de una universidad ubicada en la ciudad de México, los cuales habían concluido un curso de cálculo. El instrumento fue una serie de tres problemas, en dos, se plantean situaciones contextuales que se pueden resolver aplicando el primer teorema fundamental del cálculo o realizando las operaciones de integración y derivación (una situación es sobre la razón de cambio del volumen de agua contenido en un depósito, respecto del tiempo, donde el agua cae a una razón variable; la otra es sobre la razón de cambio del volumen de agua contenido en un depósito cilíndrico respecto a la altura del agua). En el último problema, se plantea en abstracto el mismo tipo de situación: Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, obtenga $F'(x)$, justifique su respuesta.

La aplicación del instrumento se realizó en un aula de la universidad, se les proporcionó a los participantes la serie de problemas y hojas de papel para escribir sus respuestas, y se les dio 45 minutos para contestarlo. Se realizó el análisis de las respuestas de los estudiantes a los problemas mediante el método comparativo constante para formar diferentes categorías, de donde, una de las conclusiones obtenidas es la siguiente:

La interpretación común de los estudiantes sobre el primer teorema fundamental del cálculo es que establece que la integración y derivación son operaciones inversas, pues en el 71% de las respuestas del problema mostrado (para el cual solo se tuvieron 14 respuestas) se utiliza dicho argumento. Sin embargo, en el 50% de estas respuestas se cometen errores al hacer uso inadecuado de la notación al momento de "cancelar" las operaciones inversas. Esto sugiere que los estudiantes al aplicar el primer teorema fundamental del cálculo de la forma mencionada, presentan un *comportamiento pseudo-*

conceptual, (concepto propuesto por Vinner (1997)); pues la forma en que proceden (cometiendo errores con la notación al "cancelar" las operaciones de integración y derivación cuando aparecen juntas) parece estar ligada a la representación algebraica de la situación ($\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$), no fundamentada en los conceptos involucrados.

Referencias

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *The American Mathematical Monthly, 118*(2), 99-115.

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: frameworks and roadmaps emerging from educational research. En J. Cai (Ed.), *The compendium for research in mathematics education* (pp. 526-580). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudoanalytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics,* 34, 97–129.