

THE VARIATION, COVARIATION AND THE REFERENCE SYSTEM IN THE CONSTRUCTION OF CARTESIAN IDEAS

LA VARIACIÓN, LA COVARIACIÓN Y EL SISTEMA DE REFERENCIA EN LA CONSTRUCCIÓN DE IDEAS CARTESIANAS

Itzel González Rodríguez
Universidad Autónoma de Coahuila
igrod1995@gmail.com

José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila
david.zaldivar@uadec.edu.mx

In the present investigation, the aim is to characterize and analyze the role of those elements necessary for the construction of Cartesian ideas in secondary school students (13-15 years old). After a bibliographic review about the construction and interpretation of Cartesian graphs, it was found that those elements that characterize a graphical functional thought are determined by: covariation, variation and unification of a reference system (Clement, 1989; Caballero, 2012; Radford, 2008). The notion of co-variation is defined as the relationship between the simultaneous variations of two quantities (Ferrari, 2005), while the variation in our research is characterized as the quantification of a change, that is, the modification of state, appearance, behavior, condition of a body, system or object (Caballero, 2012). Finally, the unification of a Reference System refers to unifying the phenomenological space with the Cartesian space, resulting in the starting point of a movement (Radford, 2009a). This refers to the point from which it is possible to define positions, organize actions and interpretations.

According to the above, in the present investigation the following question is posed: what is the role of variation, covariation and the unification of a reference system in the development of Cartesian ideas associated with graphs? So, the objectives that are set are: to propose a didactic alternative to start the study of the notion of function / graph different from the strategy that is commonly approached within the school mathematical discourse: the equation-table-graph triad.

Likewise, to develop meanings in the students regarding the notion of function and graph, articulating the notions of variation, co-variation and frame of reference, with the support of educational technology such as graphing calculators and motion sensors.

This ongoing research is supported by the Theory of Objectification, which conceives teaching and learning as a single process that involves both knowing and being, where the objective of mathematical education lies in a political, social, and historical effort. and cultural aimed at the creation of reflective, ethical and critical subjects in historically and culturally constituted mathematical practices, and that reflect on new possibilities of those practices (Radford, 2019). Knowledge is developed in human activity, which is called joint work since it is a social form of joint effort through which individuals produce their means of subsistence while producing themselves as human beings (Radford, 2009b).

This research has a qualitative cut, since it seeks to analyze the productions carried out by a group of secondary school students (13-15 years old) in four guided activities that involve the articulation of the three notions previously reported, with the support of motion sensors in order to link them and arrive at Cartesian notions associated with a graph.

Currently the research is in process and an experimental instrument consisting of an activity where the articulation of the three notions is proposed has been developed. In this instrument, it is proposed by asking students to freely describe the movement produced by a cyclist when going down a hill that will be previously drawn. Another type of task within the activity will be to ask students to draw two hills with the same height but different gradients and they will ask themselves in which of them the cyclist will be able to descend faster and why.

For the analysis of the students' productions, a multimodal analysis will be carried out in which the cognitive, body and perceptual resources used by the students are considered, that is, dialogues, body movements and their written representations will be analyzed (Vergel, 2016). This is expected to have results that allow a reflection on the importance of the three elements described to strengthen the construction of Cartesian ideas associated with graphs in basic level students.

LA VARIACIÓN, LA COVARIACIÓN Y EL SISTEMA DE REFERENCIA EN LA CONSTRUCCIÓN DE IDEAS CARTESIANAS

THE VARIATION, COVARIATION AND THE REFERENCE SYSTEM IN THE CONSTRUCTION OF CARTESIAN IDEAS

Itzel González Rodríguez
Universidad Autónoma de Coahuila
igrod1995@gmail.com

José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila
david.zaldivar@uadec.edu.mx

Palabras clave: Gráficas cartesianas, variación, covariación, Sistema de referencia

En la presente investigación se pretenden caracterizar y analizar el rol de aquellos elementos necesarios para la construcción de ideas cartesianas en estudiantes de nivel Secundaria (13-15 años). Posterior a una revisión bibliográfica alrededor de la construcción e interpretación de gráficas cartesianas, se encontró que aquellos elementos que caracterizan a un *pensamiento funcional gráfico* están determinados por: la covariación, la variación y la unificación de un sistema de referencia (Clement, 1989; Caballero, 2012; Radford, 2008). La noción de co-variación se define como la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades (Ferrari, 2005), mientras que la variación en nuestra investigación se caracteriza como la cuantificación de un cambio, es decir, la modificación de estado, apariencia, comportamiento, condición de un cuerpo, sistema u objeto (Caballero, 2012). Por último, la unificación de un Sistema de Referencia se refiere a unificar el espacio fenomenológico con el espacio cartesiano, resultando en el punto inicial de un movimiento (Radford, 2009a). Esto se refiere al punto a partir del cual es posible definir posiciones, organizar acciones e interpretaciones.

De acuerdo a lo anterior, en la presente investigación se plantea la siguiente pregunta: *¿cuál es el rol de la variación, covariación y la unificación de un sistema de referencia en el desarrollo de ideas cartesianas asociadas a las gráficas?* De manera que los objetivos que se plantean son: proponer una alternativa didáctica para iniciar el estudio de la noción de función/gráfica diferente de la estrategia que comúnmente se aborda dentro del discurso matemático escolar: la triada ecuación-tabla-gráfica. Asimismo, desarrollar significados en los estudiantes con respecto a la noción de función y gráfica, articulando las nociones de variación, co-variación y marco de referencia, con el apoyo de tecnología educativa como calculadoras graficadoras y sensores de movimiento.

Esta investigación en proceso se apoya en la Teoría de la Objetivación, la cual concibe la enseñanza y el aprendizaje como un único proceso que implica tanto el *saber* como el *ser*, donde el objetivo de la educación matemática reside en un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación de sujetos reflexivos, éticos y críticos en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente, y que reflexionan sobre nuevas posibilidades de esas prácticas (Radford, 2019). El saber se desarrolla en la actividad humana, que se denomina labor conjunta ya que es una forma social de esfuerzo conjunto a través de la cual los individuos producen sus medios de subsistencia mientras se producen a sí mismos como seres humanos (Radford, 2009b).

Esta investigación tiene un corte cualitativo, ya que se busca analizar las producciones que realice un grupo de estudiantes de nivel Secundaria (13-15 años) en cuatro actividades guiadas que involucren la articulación de las tres nociones reportadas anteriormente, con apoyo de sensores de movimiento para poder vincularlos y llegar a nociones cartesianas asociadas a una gráfica.

Actualmente la investigación se encuentra en proceso y se ha desarrollado un instrument experimental consistente en una actividad donde se plantea la articulación de las tres nociones. En dicho instrument se plantea por solicita a los estudiantes que describan de manera libre el movimiento que produce un ciclista al bajar por una colina que se les dibujará previamente. Otro tipo de tareas dentro de la actividad será la de solicitarle a los estudiantes que dibujen dos colinas con misma altura pero gradientes diferentes y se preguntará en cuál de ellas el ciclista podrá bajar más rápido y por qué.

Para el análisis de las producciones de los estudiantes se llevará a cabo un *análisis multimodal* en el cual se consideran los recursos cognitivos, corporales y perceptuales que utilizan los estudiantes, es decir, se analizarán diálogos, movimientos corporales y sus representaciones escritas (Vergel, 2016). Se espera con ello, contar con resultados que permitan una reflexión sobre la importancia de los tres elementos descritos para robustecer la construcción de ideas cartesianas asociadas a las gráficas en estudiantes de nivel básico.

References / Referencias

- Caballero, M. (2012). Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Ferrari, M. (2005). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. In Díaz, L. (Ed.) *Acta latinoamericana de matemática educativa 17*, (pp. 45-50), México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing, *Focus on learning problems in mathematics*, 11(1-2), 77-87.
- Radford, L. (2008). Semiotic reflections on medieval and contemporary graphic representations of motion, working paper presented at meeting of the *History and Pedagogy of Mathematics Conference*, 14-18 July, 2008, México City.
- Radford, L. (2009). "No! He starts walking backyards!" Interpreting motion graphs and the question of space, place and distance, *ZDM mathematischs education*, 41(1), 467-480.
- Radford, L. (2009). Signifying relative motion. Time, spade and semiotic of cartesian graphs. In Roth, W. *Mathematical representation at the interface of body and culture* (pp. 45-69). Charlotte, North Carolina: Information Age Publishing, Inc.
- Radford, L. (2019). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In Gobara, S. & Radford, L. *Teoria da objetivação: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática* (pp. 15-42). São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.
- Vergel, R. (2016). Análisis multimodal. In *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria* (pp. 93-152) Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

MATHEMATICAL MODELING FOR STUDYING THE CONCEPT OF INTEGRAL THROUGH AN AUTHENTIC PROBLEM

MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL A TRAVÉS DE UN PROBLEMA AUTÉNTICO

Shirley Johana Toloza Peña
Universidad Industrial de Santander
shirley2198158@correo.uis.edu.co

Jorge Enrique Fiallo Leal
Universidad Industrial de Santander
jfiallo@uis.edu.co

Keywords: Calculus, Modeling, University Mathematics.

The findings of the research are shown from the perspective of mathematical modeling in the classroom, as a study process of phenomena or situations that could surface from everyday social and cultural contexts of the students, or from other sciences (Villa-Ochoa, 2010). To answer the question *how mathematical modeling of authentic problems contributes to the study on the concept of integral by university students*, we assume a mathematical model as a set of mathematical representations and relations for explaining, predicting and solving aspects of a phenomenon (Villa-Ochoa y otros, 2009a). An authentic problem is proposed (Kaiser y Schwarz, 2010) from the analysis of a simulation in GeoGebra of the download speed of a file, following the phases of ACODESA methodology. (Hitt, 2007).

The research was carried out with the participation of four students (aged 16-19) from a Colombian public university who passed the differential calculus course and had access to Aula Virtual GeoGebra. For the analysis of the data, the responses and written productions of the students in the Aula Virtual, and the recording of the responses to the structured interview (Goldin, 200) applied on the synchronic encounters were taken into account.

As an initial finding, the models built allowed to recognize the integral as the accumulated size of the file that has been downloaded until an instant of time t and was calculated as the area below the speed function graphic. Initially, the speed was simulated by a constant function, so the students resorted to the idea of inscribing a rectangle which base was the value of t and the height was the value of speed to find the size. Then, the speed was simulated by a lineal function with a slope of 0,1 for which the students divided the graphic into two regions and provided a model that represents the area below the curve. Afterwards, the speed was simulated by a sinusoidal function with a behavior similar to that generated by an internet connection, in which the speed increases or decreases, so the students considered the regions of the area they know and brought it neat the curve. Each student found a different model, by taking as a common significance that the area below the curve represented the size of the file until a particular time t .

References

- Goldin, GA (2000). Una perspectiva científica sobre entrevistas estructuradas basadas en tareas en la investigación en educación matemática. *Manual de diseño de investigación en educación matemática y científica*, 517-545.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés, 65-88.
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51-76.
- Villa-Ochoa, J. (2010). Modelación Matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación.
- Villa-Ochoa, J. A., Quintero, C. A. B., Arboleda, M. D. J. B., Castaño, J. A. O., & Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 159-180.

MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL A TRAVÉS DE UN PROBLEMA AUTÉNTICO

MATHEMATICAL MODELING FOR STUDYING THE CONCEPT OF INTEGRAL THROUGH AN AUTHENTIC PROBLEM

Shirley Johana Toloza Peña
Universidad Industrial de Santander
shirley2198158@correo.uis.edu.co

Jorge Enrique Fiallo Leal
Universidad Industrial de Santander
jfiallo@uis.edu.co

Palabras Claves: Cálculo, Modelación, Matemáticas de nivel universitario.

Se presenta resultados iniciales de una investigación desde una perspectiva de la modelación matemática en el aula de clase, como un proceso de estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir de contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes o de otras ciencias (Villa-Ochoa, 2010). Para dar respuesta a la pregunta ¿Cómo la modelación matemática de problemas auténticos contribuye al estudio del concepto de integral a estudiantes universitarios?, asumimos un modelo matemático como un conjunto de representaciones y relaciones matemáticas para explicar, predecir y solucionar aspectos de un fenómeno (Villa-Ochoa y otros, 2009a). Se propone un problema auténtico (Kaiser y Schwarz, 2010), a partir del análisis de una simulación en GeoGebra del fenómeno de la velocidad de descarga de un archivo, siguiendo las fases de la metodología ACODESA (Hitt, 2007).

La investigación fue realizada con cuatro estudiantes de una universidad pública colombiana (16-19 años) que aprobaron el curso de cálculo diferencial, y que contaban con acceso al Aula Virtual GeoGebra. Para el análisis de los datos se tuvo en cuenta las respuestas y las producciones escritas de los estudiantes en el Aula y las grabaciones de respuestas a la entrevista estructurada (Goldin, 2000) aplicada en los encuentros sincrónicos.

Como resultados iniciales se tiene que los modelos construidos, permitieron reconocer la integral como el tamaño acumulado del archivo que se ha descargado hasta un instante de tiempo t , y fue calculado como el área bajo la gráfica de la función velocidad. Inicialmente la velocidad fue simulada por una función constante, por lo que los estudiantes recurrieron a la idea de inscribir un rectángulo, donde la base fuera el valor de t y la altura el valor de la velocidad para hallar el tamaño. Luego la velocidad fue simulada por una función lineal con pendiente 0,1 para el cual, los estudiantes dividieron la gráfica en dos regiones y dieron un modelo que representa el área bajo la curva. Posteriormente la velocidad fue simulada por una función sinusoidal con un comportamiento similar al generado por conexión a internet, en los cuales la velocidad aumenta o disminuye, por lo cual los estudiantes tuvieron en cuenta las regiones de área que conocen y las aproximaron a la curva, encontrando cada estudiante un modelo diferente, pero tomando como significado en común el área bajo la curva estaba representando el tamaño de archivo hasta un determinado tiempo t .

Referencias

- Goldin, GA (2000). Una perspectiva científica sobre entrevistas estructuradas basadas en tareas en la investigación en educación matemática. *Manual de diseño de investigación en educación matemática y científica*, 517-545.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés*, 65-88.
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51-76.

- Villa-Ochoa, J. (2010). Modelación Matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación.
- Villa-Ochoa, J. A., Quintero, C. A. B., Arboleda, M. D. J. B., Castaño, J. A. O., & Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 159-180.