INDUCTIVE REASONING IN MATHEMATICS TEACHERS WHEN RESOLVING GENERALIZATION TASKS

Karina Nuñez-Gutiérrez
Universidad Autónoma de Guerrero
kgutierrez@uagro.mx

Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
gcabanas@uagro.mx

This study reports an analysis of inductive reasoning of Mexican middle school mathematics teachers, when solving tasks of generalization of a quadratic sequence in the context of figural patterns. Data was collected from individual interviews and written answers to generalization tasks. Based on Cañadas and Castro's inductive reasoning model, we found that most of the teachers followed four stages to obtain a general rule: observation of particular cases, search of patterns, conjecture formulation and generalization.

Keywords: Reasoning and Proof, Algebra and Algebraic Thinking, Inductive Reasoning, Figural Pattern, Generalization, Teacher.

Introduction

Inductive reasoning is a thought process that leads to the discovery of general rules by the observation and combination of specific instances (Polya, 1994). It is considered to be an important route to develop critical thinking and student´s ability to solve problem situations, to generalize different mathematical patterns and for mathematics learning (Sosa Moguel, Aparicio Landa, & Cabañas-Sánchez, 2019; Castro, Cañadas, & Molina, 2010; Papageorgiou, 2009; Haverty, Koedinger, Klahr, & Alibali, 2000). In addition, it also contributes on the route to make mathematical proof. However, students face difficulties with the formal validation processes. Some of these difficulties are linked to their reasoning skills and their capabilities to make and understand proofs immediately. For this, an adaptation process is required, as well as a logical progression in the development of their reasoning, from closer everyday reasoning to the concrete, to more abstract mathematical reasoning (Castro, Cañadas & Molina, 2010). Thus, it is recognized that induction fosters the development of these types of abilities, from the formulation of conjectures and their formal proof to guarantees of the veracity of the conjecture (Cañadas & Castro, 2007). In this regard, the National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) stresses the need to develop middle school students' proficiency in using inductive (and deductive) reasoning to examine patterns and structures in order to identify regularities and make and evaluate conjectures about possible generalizations, in linear or quadratic patterns. Based on these demands on students, mathematics teachers are implicitly linked. To do so, they need the ability to help students make, refine, and explore conjectures on the basis of evidence and use a variety of reasoning techniques to confirm or refute those conjectures (NCTM, 2000). According to Brodie (2010), "teachers can, through questions and prompts, try to provoke learners into thinking in particular ways and support them to compare, verify, explain, and justify their conjectures" (p. 45). In addition, Ball and Bass (2003) say that, teachers need abilities in providing resources to the students to allow them to develop these skills and to use environments that make this possible.

On the other hand, most of the inductive reasoning research that studies it as a thought process and as a generator of knowledge in generalization tasks context, mainly refer to linear relationships. Few have been focused on quadratic ones (Kirwan, 2017), both in training and in-service teachers. This article examines the inductive reasoning of Mexican middle school mathematics teachers, when solving tasks of generalization of a quadratic sequence.

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Theoretical Framework

Inductive reasoning is the human thought action that produces statements and reaches conclusions, starting with the observations of particular cases until arriving at a generality (Cañadas, 2002). It is a cognitive process that contributes to the advancement of knowledge, where more information is obtained than is provided by the initial data with which that process begins. Inductive reasoning in this study is analyzed from the inductive reasoning model proposed in Cañadas and Castro (2007). This model is based on Polya´s (1966) steps, Cañadas´s empirical work (2002) and Reid´s (2002) stages.

Inductive Reasoning Model

The inductive reasoning model is made up of seven stages. They are presented in an ideal order. They start with the observation of particular cases and end with the generalization. Not all these stages necessarily occur. In the following we describe these stages:

Observation of particular cases. The starting point of inductive reasoning is the experience with particular cases.

Organization of particular cases. The use of different strategies to systematize and facilitate work in particular cases.

Search of patterns. Some regularity or behavior is detected. Patterns are considered as something that is repeated regularly (Stacey, 1989), their recognition allows the development of the ability to generalize. There are different types of patterns: numerical, pictorial, figural, computational procedures or repetitive patterns (Amit & Neria, 2008).

Conjecture formulation. It is a statement about all possible cases, based in particular ones but with an element of doubt. This statement seems reasonable, but the validity needs to be validated. It has not been convincingly validated and it is not yet known that there are many examples that contradict it, nor is it known that it has any false consequence (Mason, Burton, & Stacey, 1988).

Conjecture validation. At this stage, there is an attempt to validate the conjecture for new specific cases, but not in general.

Generalization. Mathematics patterns are related to a general rule, not only to some cases. Based on a conjecture which is true for some particular cases, and having validated such conjecture for new cases (conjecture validation), students might hypothesize that the conjecture is true in general. Generalization is the deliberate extension of reasoning or communication beyond considered cases, recognizing and explaining their similarity (Kaput, 2008).

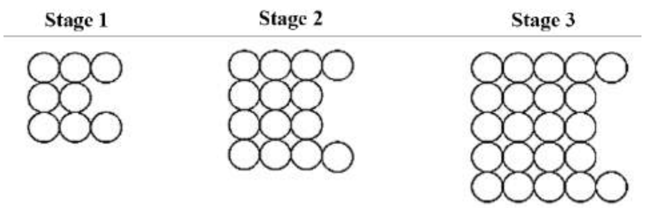
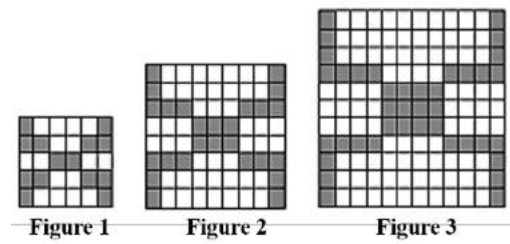
General conjectures justification. At this point, a formal proof can provide the final justification that guarantees the truth of the conjecture.

Method

This research is a qualitative and interpretative. It was carried out with sixteen middle school mathematics teachers (nine women and seven men) with between 5 and 14 years of teaching experience in public schools in Mexico. They were voluntarily involved in this study through inductive reasoning workshops in the context of mathematics education congresses. The participating teachers had professional qualifications as middle school teachers (Nine a mathematics bachelor's degree, two in Mathematics Education and five in Telesecundaria), so they all studied mathematical concepts such as sequences and linear an quadratic sequences. The selection criterion of the participants was to have experienced as a third grade teacher the teaching quadratic sequences using numerical and figural patterns. Taking into account the above, two task were designed on the generalization of quadratic sequences (see figure 1). The patio tile task adapted from Kirwan's study (2017) and the frog quadratic pattern task from Rivera's study (2013).

These tasks consist of increasing patterns with arithmetic progression of order 2 in the natural numbers. Teachers worked individually for 20 to 30 minutes on the tasks. After the analysis of their answers, six of them were interviewed, to understand in greater depth their inductive reasoning process and also because they had shown different ways of reasoning.

Table 1: Quadratic sequence tasks used in the research.

Task 1	Task 2
Task 1: The patio tile task. In the building of a patio, circular stones of equal size are placed. To observe the progress of the construction, you take a photo of the patio by stage.	Task 2: The frog quadratic pattern task. Observe at the sequence of the following figures. Extensively justify the solution process in each of the questions.
	
a. How many circular stones have been placed for the sixth stage if the construction of the patio is carried out in the same way? Justify your answer. b. How many stones are there in stage 50? Justify your answer. c. How can you find the number of circular stones for any number of stages? Explain your answer	a. How many gray squares are there in figure 5? b. How many gray squares are there in figure 7? c. How many gray squares are there in figure n?

Results

In this study the inductive reasoning stages most of the teachers followed were: Organization of particular cases, search of patterns, conjecture formulation and generalizing. Less frequently, the organization of particular cases and the conjecture validation. None of the teachers showed the involvement of the conjecture justification step.(see Table 2).

Table 2. Stages of inductive reasoning followed by mathematics teachers

Task	Stages						
	Observation of particular cases	Organization of particular cases	Search of patterns	Conjecture formulation	Conjecture validation	Generalization	General conjectures justification.
T1	11	5	12	7	2	11	0
T2	9	4	11	8	6	8	0

Observation and organization of particular cases

In task 1, eleven teachers observed particular cases and in task 2, nine. Most identified the number of objects at each stage of the sequence. In some cases, their work consisted of strategic counts based on the decomposition of the figures. The visualization of the figural pattern was fundamental to help teachers identify some configurations at the given stages. Other teachers relied on counting to establish the k-th terms and identify the type of sequence. Although it is recognized that teachers worked with particular cases, at least 3 of them faced difficulties in advancing to the following stages.

The teachers who used the organizing the particular cases stage (see Table 2) used double-entry tables, in which they established a correspondence between two variables, the number of objects in the figural pattern, with the number of the stage or figure, in the context of the demands of the tasks. The tables were represented in two ways, vertical and horizontal. This last form was used by the teachers who used the differences method in their inductive process to identify the type of sequences.

Search for Patterns

The teachers who identified the pattern resorted to two ways of proceeding (see Table 3):

A) Figure decomposition: The objects of the figural pattern were perceived as basic configurations: squares and / or rectangles. From this, a useful mathematical structure was associated to explain and justify the behavior of these objects.

B) Differences method: They identified the recurrence pattern between the k-th terms of the sequence associated with the figural pattern. Subsequently, they worked with the first difference and recognized that it is not constant, then the second differences were determined and observed that it is constant. Thus, they derived that the sequence is quadratic. Finally, they find the coefficients of the sequence of the form $ax^2 + bx + c$, to establish the general rule of quadratic sequence.

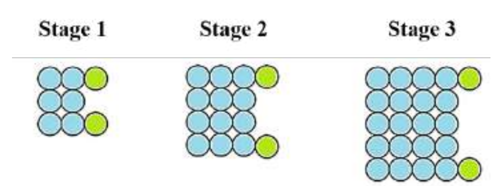
Formulation and justification of the conjecture

The teachers analyzed the behavior of the objects in the figures (figural pattern). At first, they made their conjectures through additive and multiplicative structures, then they transformed them into an algebraic structure, in terms of n (demand for the task) or with another variable. Few justified their conjectures. Of those who did, it was of the algebraic type and they validated it with particular cases.

Generalization

The results show that eleven of the sixteen teachers managed to construct the general rule that explains the behavior of the figural pattern in task 1 and eight teachers in task 2. Those who generalized without making conjectures used the difference method to recognize the type of sequence (quadratic) and based on that, they determined the general rule associated with the figural pattern. The generalization constructed by those who formulated a conjecture, verified its veracity. In some teachers, this process was carried out with the particular cases proposed and in others, through new cases, such as near and far terms. This process consisted of evaluating the conjecture, in correspondence between the quantity of the objects and the number of the stage or figure. Two ways of expressing the general rule were recognized, one algebraically and the other verbally.

Table 3: Ways of proceeding for the teacher when solving generalization tasks

Ways of proceeding	Task	Examples
Figure decomposition	T1	 Based on this way of perceiving the objects of the figural pattern in T1, they constructed a general rule associated with a multiplicative and additive structure: $(n+1)(n+2)+2$

<table>
<tr><td></td><td>T2</td><td>
Figure 1 Figure 2
Based on this way of perceiving the objects of the figural pattern in T1, they constructed a general rule associated with a multiplicative and additive structure: $4(1+2n)+n(n+1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Differences method</td><td>T1</td><td>k-th terms: 8, 14, 22, 32
First difference: 6, 8, 10
Second difference: 2, 2
Based on this way of perceiving the objects of the figural pattern in T1, they constructed a general rule associated with an algebraic expression: x^2+3x+4
From the algorithm of:
$a\ +b+c=8;\ 3a+b=6;\ 2a=2,$ they found the coefficients of the sequence.</td></tr>
<tr><td>T2</td><td>k-th terms: 14, 26, 56, 74
First difference: 12, 14, 16
Second difference: 2, 2
Based on this way of perceiving the objects of the figural pattern in T1, they constructed a general rule associated with an algebraic expression: x^2+9x+4
From the algorithm of:
$a\ +b+c=14;\ 3a+b=12;\ 2a=2,$ they found the coefficients of the sequence.</td></tr>
</table>

Discussion and conclusion

This article examined the inductive reasoning of Mexican middle school mathematics teachers, when solving quadratic sequences generalization tasks. From a methodological point of view the tasks encouraged teacher´s work in near and far stages in order to build and validate a conjecture which explains the behavior of the involved figural pattern and to establish it as the general rule. Although as was mentioned above, not all of them showed the validation of their conjectures. On the other hand, it was recognized that not all of these stages necessarily occurred in the inductive reasoning processes carried out by teachers.

With regard to solving tasks in figural patterns generalization, teachers showed the inductive process as a strategy. The study has reported that working with well-defined figurative patterns favors that they be interpreted as configurations in a certain way (Rivera, 2010). In this sense, the teacher's task in this study consisted of involving a significant generalization of patterns. This study also recognizes that the objects of some figural patterns are complex to interpret, even when their construction is well defined. As an example, task 2 where the figural pattern involved more than one object, gray and white squares, in relation to the figure number. The task required the teacher to represent algebraically the behavior of the variable, that is, the gray squares which make up a rectangular figure, also made up of white squares. The distribution of gray squares was not related to a specific geometric figure. These variables influenced teachers' difficulties to recognize the behavior of gray squares.

In line with Rivera (2010), in this study the context of generalization of figural patterns engaged teachers in the coordination of perceptual and symbolic inferential abilities, more specifically, the figural pattern that is high in Gestalt goodness, because it tends to have a well-defined structure that has easily discernible parts and a balanced, and harmonious form of the pattern, which allowed most of the teachers to specify an algebraically useful formula. Naturally, the teachers proceeded in a different way when working with the objects of the figural pattern of each task.

References

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 111-129.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematical reasonanle in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards for school mathematics* (págs. 27-44). Reston, VA: National Countil of Teachers Mathematics.

Brodie , K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.* Johannesburg, Sudáfrica: Springer.

Cañadas, M. C. (2002). Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria. Granada: Universidad de Granada

Cañadas, M., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 2*(1), 69-81.

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Uno, 54*, 55-67.

Haverty, L.A., Koedinger, K.R., Klahr, D., & Alibali, M.W. (2000). Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. *Cognitive Science, 24* (2), 249-298.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blantón, *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-18). Estados Unidos de América: Routledge Taylor & Francis Group.

Kirwan, J. (2017). Using visualization to generalize on quadratic patterning task. *Mathematics Teacher , 110*(8), 588-593.

Mason, J., Burton , L., & Stacey, K. (1988). *Thinking Mathematically.* (M. Martínez Pérez, Trad.) España: Labor S.A-Ministerio de Educación y Ciencias.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción del original "Principles and Standars for school mathematics" 2000.* Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Papageorgiou, E. (2009). Towards a teaching approach for improving mathematics inductive reasoning problem solving. *Proceedings of the 33rd Conference of the International International Group for the Psychology of Math. 4*, pp. 313-320. Thessaloniki, Greece: PME.

Pólya, G. (1966). *Matemática y razonamiento plausible.* Madrid: Technos-Madrid.

Polya, G. (1994). *Cómo plantear y resolver problemas* (Décimooctava ed.). (J. Zagazagoitia, Trad.) México: Trillas.

Reid, D. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies Mathematical, 73*(3), 297–328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* San José, USA: Springer.

Sosa Moguel, L. E., Aparicio Landa, E., & Cabañas-Sánchez, G. (2019). Characterization of Inductive Reasoning in Middle School Mathematics Teachers in a Generalization Task. International Electronic Journal of Mathematics Education 14 (3), 563-581. doi.org/10.29333/iejme/5769

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN MAESTROS DE MATEMÁTICAS AL RESOLVER TAREAS DE GENERALIZACIÓN

INDUCTIVE REASONING IN MATHEMATICS TEACHERS WHEN RESOLVING GENERALIZATIONS TASKS

Karina Nuñez-Gutiérrez
Universidad Autónoma de Guerrero
kgutierrez@uagro.mx

Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
gcabanas@uagro.mx

Este estudio reporta un análisis del razonamiento inductivo de maestros mexicanos de matemáticas de secundaria, al resolver tareas de generalización de una sucesión cuadrática en un contexto de patrones figurales. Los datos fueron recolectados de entrevistas individuales y respuestas escritas de tareas sobre generalización. Con base en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro, encontramos que la mayoría de los maestros siguieron cuatro etapas para obtener una regla general: observación de casos particulares, búsqueda de patrones, formulación de conjeturas y generalización.

Palabras clave: Razonamiento Inductivo, Patrón figural, Generalización, Maestro.

Introducción

El razonamiento inductivo es un proceso del pensamiento que conduce al descubrimiento de reglas generales mediante la observación y la combinación de instancias específicas (Polya, 1994). Se considera una ruta importante para desarrollar el pensamiento crítico y las habilidades de los estudiantes para resolver situaciones problemáticas, para generalizar diferentes patrones matemáticos y para el aprendizaje de las matemáticas (Sosa Moguel, Aparicio Landa y Cabañas-Sánchez, 2019; Castro, Cañadas, & Molina, 2010; Papageorgiou, 2009; Haverty, Koedinger, Klahr y Alibali, 2000). Además, también contribuye en la ruta para hacer pruebas matemáticas. Sin embargo, los estudiantes enfrentan dificultades con los procesos formales de validación. Algunas de estas dificultades están relacionadas con sus habilidades de razonamiento y sus capacidades para hacer y comprender pruebas de inmediato. Para ello, se requiere un proceso de adaptación y seguir una progresión lógica en el desarrollo de su razonamiento, desde un razonamiento cotidiano más cercano al concreto, hasta un razonamiento matemático más abstracto (Castro, Cañadas y Molina, 2010). Así, se reconoce que la inducción fomenta el desarrollo de este tipo de habilidades, a partir de la formulación de conjeturas y su prueba formal para garantizar la veracidad de la conjetura (Cañadas y Castro, 2007). Al respecto, el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas [NCTM] (2000) enfatiza la necesidad de desarrollar la competencia de los estudiantes de secundaria en el uso del razonamiento inductivo (y deductivo) para examinar patrones y estructuras para identificar regularidades; establecer y evaluar conjeturas sobre posibles generalizaciones, en patrones lineales o cuadráticos. Sobre la base de estas demandas en los estudiantes, los maestros de matemáticas están vinculados implícitamente. Para hacerlo, necesitan de la habilidad para ayudar a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas sobre la base de evidencia y usar una variedad de técnicas de razonamiento para confirmar o refutar esas conjeturas (NCTM, 2000). Según Brodie (2010), "el maestro puede, a través de preguntas y sugerencias, tratar de provocar que los estudiantes piensen de manera particular y ayudarlos a comparar, verificar, explicar y justificar sus conjeturas" (p. 45). Además, Ball y Bass (2003) afirman que los maestros necesitan habilidades para proporcionar recursos a los estudiantes que les permitan desarrollar estas destrezas y utilizar entornos que lo hagan posible.

Por otro lado, la mayoría de las investigaciones de razonamiento inductivo, que lo estudian como un proceso de pensamiento y como un generador de conocimiento en el contexto de tareas de generalización, se refieren principalmente a relaciones lineales. Pocos se han centrado en los cuadráticos (Kirwan, 2017), tanto en la formación como en el servicio de los docentes. Este artículo examina el razonamiento inductivo de los maestros mexicanos de matemáticas de la escuela secundaria, al resolver tareas de generalización de una sucesión cuadrática.

Fundamentación Teórica

El razonamiento inductivo es la acción del pensamiento humano que produce afirmaciones y llega a conclusiones, comenzando con las observaciones de casos particulares hasta llegar a una generalidad (Cañadas, 2002). Es un proceso cognitivo que contribuye al avance del conocimiento, donde se obtiene más información de la que proporcionan los datos iniciales con los que comienza ese proceso. El razonamiento inductivo en esta investigación se analiza a partir del modelo de razonamiento inductivo propuesto en Cañadas y Castro (2007). Este modelo se basa en los pasos de Polya (1966), el trabajo empírico de Cañadas (2002) y las etapas de Reid (2002).

Modelo del razonamiento inductivo

El modelo de razonamiento inductivo consta de siete etapas. Se presentan en un orden ideal. Comienzan con la observación de casos particulares hasta la generalización. No todas estas etapas ocurren necesariamente. A continuación describimos estas etapas:

Observación de casos particulares. El punto de partida del razonamiento inductivo son las experiencias con casos particulares.

Organización de casos particulares. Uso de diferentes estrategias para sistematizar y facilitar el trabajo con casos particulares.

Identificación de patrones. Se reconoce alguna regularidad o comportamiento. Los patrones se consideran como algo que se repite con regularidad (Stacey, 1989), su reconocimiento permite el desarrollo de la habilidad para generalizar. Existen diferentes tipos de patrones: numéricos, pictóricos, figural, procedimientos computacionales o patrones repetitivos (Amit & Neria, 2008)

Formulación de conjeturas. Es una afirmación sobre todos los casos posibles, basados en los particulares, pero con un elemento de duda. La conjetura es una afirmación que parece razonable, pero cuya veracidad no ha sido validada. No se ha validado de manera convincente y aún no se sabe que haya ejemplos que lo contradicen, ni se sabe que tenga alguna consecuencia falsa (Mason, Burton , & Stacey, 1988).

Validación de las conjeturas. En esta etapa, se intenta validar las conjeturas para nuevos casos específicos, pero no en general.

Generalización. Los patrones matemáticos se relacionan con una regla general, no solo con algunos casos. Con base en una conjetura que es cierta para algunos casos particulares, y habiendo validado dicha conjetura para casos nuevos (validación de la conjetura), los estudiantes podrían hipotetizar que la conjetura es verdadera en general. La generalización es extender deliberadamente el razonamiento o comunicación más allá de los casos considerados, reconociendo y explicando su similitud (Kaput,2008).

Justificación de las conjeturas. En este punto, una prueba formal puede proporcionar la justificación final que garantiza la veracidad de la conjetura.

Método

Es una investigación cualitativa e interpretativa. Se llevó a cabo con dieciséis maestros de matemáticas de secundaria (nueve mujeres y siete hombres) con 5 y 14 años de experiencia docente en escuelas públicas de México. Participaron voluntariamente en esta investigación a través de talleres de razonamiento inductivo en el contexto de congresos de Educación Matemática.

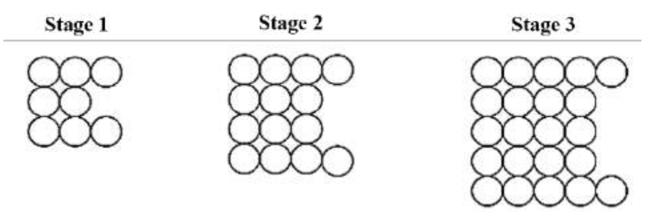
Los maestros participantes tenían calificaciones profesionales como maestros de escuela intermedia (nueve una licenciatura en matemáticas, dos en educación matemática y cinco en telesecundaria), por lo que todos estudiaron conceptos matemáticos como sucesiones y sucesiones lineales y cuadráticas. El criterio de selección de los participantes era que hubiesen experimentado como maestro de tercer grado la enseñanza de sucesiones cuadráticas utilizando patrones numéricos y figurales. Teniendo en cuenta lo anterior, se diseñaron dos tareas sobre la generalización de sucesiones cuadráticas (ver figura 1). La tarea de mosaico de patio se adaptó del estudio de Kirwan (2017) y la tarea de patrón cuadrático de rana del estudio de Rivera (2013).

Estas tareas consisten en patrones crecientes con progresión aritmética de orden 2 en los números naturales. Los maestros trabajaron individualmente durante 20 a 30 minutos en las tareas. Después del análisis de sus respuestas, se entrevistó a seis de ellos para comprender en mayor profundidad su proceso de razonamiento inductivo y también porque habían mostrado diferentes formas de razonamiento.

Tabla 1: Tareas de sucesiones cuadráticas utilizadas en la investigación

<table>
<tr>
<td>

Tarea 1*: Tarea de la piedra del patio*. En la construcción de un patio, se colocan piedras circulares de igual tamaño. Para observar el avance que sigue la construcción, se toma una foto al patio por etapa



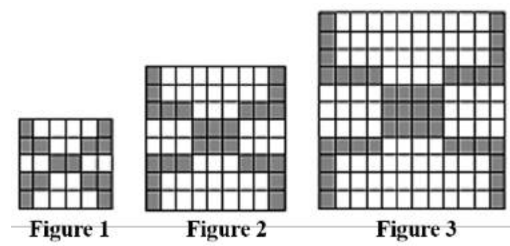
a. ¿Cuántas piedras circulares se han colocado para la sexta etapa si en la construcción del patio se avanza de la misma manera? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántas para la etapa 50? Justifica tu respuesta.

c. ¿Cómo se puede hallar la cantidad de piedras circulares para cualquier número de etapa? Describe ampliamente tu respuesta.

</td>
<td>

Tarea 2: *Tarea del patrón cuadrático de la rana*. Observa la secuencia de las siguientes figuras. Justifica ampliamente el proceso de solución en cada una de las preguntas.



a. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 5?

b. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 7?

c. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura n?

</td>
</tr>
</table>

Resultados

En este estudio, las etapas de razonamiento inductivo que siguió la mayoría de los maestros fueron: Organización de casos particulares, Búsqueda de patrones, formulación de conjeturas y generalización. Con menos frecuencia, la organización de casos particulares y la validación de conjeturas. Con respecto al paso de justificación de conjeturas, ninguno de los maestros mostró haber estado involucrado (ver Tabla 2).

Tabla 2. Etapas del razonamiento inductivo que siguen los maestros de matemáticas

Tarea	Etapas						
	Observación de casos particulares	Organización de casos particulares	Búsqueda de patrones	Formulación de la conjetura	Validación de la conjetura	Generalización	Justificación de la conjetura

T1	11	5	12	7	2	11	0
T2	9	4	11	8	6	8	0

Observación y Organización de Casos Particulares

En la tarea 1, once maestros observaron los casos particulares y en la tarea 2, nueve. La mayoría, identificó la cantidad de objetos en cada etapa de la sucesión. En algunos casos, este trabajo consistió de conteos estratégicos, basado en la descomposición de las figuras. La visualización del patrón figural fue fundamental, ya que contribuyó a que los maestros reconocieran determinadas configuraciones en las etapas dadas. Otros maestros, se apoyaron del conteo para establecer los términos k-ésimo e identificar el tipo de sucesión. Si bien se reconoce que los maestros trabajaron con casos particulares, al menos 3 evidenciaron dificultades para avanzar a las etapas siguientes.

Los maestros que recurrieron a la organizaron los casos particulares (ver tabla 1) se apoyaron de tablas de doble entrada, en las que establecieron una correspondencia entre dos variables, cantidad de objetos del patrón figural, con el número de la etapa o figura, en el marco de las demandas de las tareas. Las tablas fueron representadas de dos formas, vertical y horizontal. Esta última forma, fue utilizada por los maestros que se apoyaron del método de diferencias en su proceso inductivo, para identificar el tipo de sucesión.

Identificación del Patrón

Los maestros que identificaron el patrón, recurrieron a dos formas de proceder (ver tabla 2):

A. **Descomposición de la figura:** Percibieron los objetos del patrón figural como configuraciones básicas: cuadrados y/o rectángulos. A partir de ello, asociaron una estructura matemática útil para explicar y justificar el comportamiento de estos objetos.
B. **Método de diferencias:** Identificaron el patrón de recurrencia entre los términos k-ésimo de la sucesión asociada con el patrón figural. Posteriormente, trabajaron con la primera diferencia y reconocieron que no es constante, luego se determinaron las segundas diferencias y observaron que es constante. Por lo tanto, derivaron que la sucesión es cuadrática. Finalmente, encuentran los coeficientes de la sucesión de la forma $ax^2 + bx + c$, para establecer la regla general de la sucesión cuadrática.

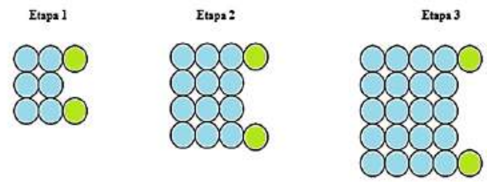
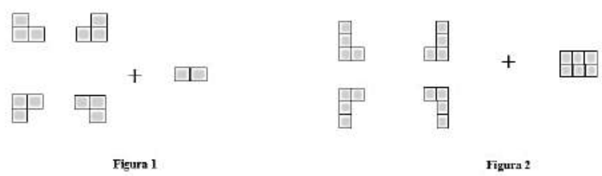
Formulación y Justificación de la Conjetura

Los maestros percibieron el comportamiento de los objetos en las figuras (patrón figural). Al principio, hicieron estas conjeturas a través de estructuras aditivas y multiplicativas, luego las transformaron en una estructura algebraica, en términos de n (demanda de la tarea) o con otra variable. Pocos justificaron sus conjeturas. De los que lo hicieron, fue el tipo algebraico y lo validaron con casos particulares.

Generalización

Los resultados evidencian, que once de los dieciséis maestros, lograron construir la regla general que explica el comportamiento del patrón figural en la tarea 1 y ocho, en la tarea 2, esto es, generalizaron. Los que generalizaron sin formular conjeturas, usaron el método de diferencias para reconocer el tipo de sucesión (cuadrática) y con base en ello, determinaron la regla general asociada al patrón figural. La generalización construida por quienes formularon una conjetura, la verificaron para comprobar su veracidad. En algunos, este proceso fue realizado con los casos particulares propuestos y en otros, mediante nuevos casos, como términos cercanos y lejanos. Este proceso consistió en evaluar la conjetura, en correspondencia entre la cantidad de los objetos con el número de la etapa o figura. Se reconocieron dos formas de expresar la regla general, una de forma algebraica y otra, verbal.

Tabla 3: Formas de proceder de los maestros al resolver tareas de generalización

Formas de proceder	Tarea	Ejemplos
Descomposición de la figura	T1	 Con base en esta forma de percibir los objetos del patrón figural en T1, construyeron una regla general asociada a una estructura multiplicativa y aditiva: $(n+1)(n+2)+2$
	T2	 Con base en esta forma de percibir los objetos del patrón figural en T2, construyeron una regla general asociada a una estructura multiplicativa y aditiva: $4(1+2n)+n(n+1)$
Método de diferencias	T1	Términos k-ésimo 8 14 22 32 Primera diferencia 6 8 10 Segunda diferencia 2 2 Con base en esta forma de percibir los objetos del patrón figural en T1, construyeron una regla general asociada a una expresión algebraica: x^2+3x+4 A partir del algoritmo de $a+b+c=8$; $3a+b=6$; $2a=2$, hallaron los coeficientes de la sucesión.
	T2	Términos k-ésimo 14 26 56 74 Primera diferencia 12 14 16 Segunda diferencia 2 2 Con base en esta forma de percibir los objetos del patrón figural en T2, construyeron una regla general asociada a una expresión algebraica: x^2+9x+4 A partir del algoritmo de $a+b+c=14$; $3a+b=12$; $2a=2$, hallaron los coeficientes de la sucesión.

Discusión y conclusiones

Este artículo examinó el razonamiento inductivo de los maestros mexicanos de matemáticas de secundaria, al resolver tareas de generalización de sucesiones cuadráticas. Desde un punto de vista metodológico, las tareas alentaron el trabajo del maestro en etapas cercanas y lejanas, para construir y validar una conjetura que explica el comportamiento del patrón figural involucrado y establecerlo como la regla general. Aunque como se mencionó anteriormente, no todos evidenciaron la validación de sus conjeturas. Por otro lado, se reconoció que no todas estas etapas ocurrieron necesariamente en los procesos de razonamiento inductivo llevados a cabo por los maestros.

Con respecto a la resolución de tareas en la generalización de patrones figurales, los maestros mostraron el proceso inductivo como una estrategia. La investigación ha documentado que trabajar con patrones figurales bien definidos favorece que sean interpretados como configuraciones de cierta manera (Rivera, 2010). En este sentido, la tarea del maestro en esta investigación consistió en involucrarse en una generalización significativa de los patrones. Este estudio también reconoce que los objetos de algunos patrones figurales son complejos de interpretar, incluso cuando su construcción está bien definida. Como ejemplo, la tarea 2. El patrón figural involucraba más de un objeto, cuadrados grises y blancos, en relación con el número de la figura. La tarea demandó representar algebraicamente el comportamiento de la variable, es decir, los cuadrados grises que conforman una figura rectangular, también compuesta de cuadrados blancos. La distribución de cuadrados grises no está relacionada con una figura geométrica específica. Estas variables influyeron en las dificultades de los maestros para reconocer el comportamiento de los cuadrados grises.

En línea con Rivera (2010), en esta investigación, el contexto de generalización de patrones figurales involucró a los maestros en la coordinación de habilidades inferenciales perceptivas y simbólicas, más específicamente el patrón figural que es alto en la bondad de Gestalt, porque tiende a tener una definición bien definida, estructura que tiene partes fácilmente discernibles, forma equilibrada y armoniosa del patrón, lo que permitió a la mayoría de los maestros especificar una fórmula algebraicamente útil. Naturalmente, los maestros procedieron de manera diferente al trabajar con los objetos del patrón figural de cada tarea.

Referencias

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 111-129.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematical reasonanle in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards for school mathematics* (págs. 27-44). Reston, VA: National Countil of Teachers Mathematics.

Brodie , K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.* Johannesburg, Sudáfrica: Springer.

Cañadas, M. C. (2002). Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria. Granada: Universidad de Granada

Cañadas, M., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 2*(1), 69-81.

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Uno, 54*, 55-67.

Haverty, L.A., Koedinger, K.R., Klahr, D., & Alibali, M.W. (2000). Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. *Cognitive Science, 24* (2), 249-298.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blantón, *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-18). Estados Unidos de América: Routledge Taylor & Francis Group.

Kirwan, J. (2017). Using visualization to generalize on quadratic patterning task. *Mathematics Teacher , 110*(8), 588-593.

Mason, J., Burton , L., & Stacey, K. (1988). *Thinking Mathematically.* (M. Martínez Pérez, Trad.) España: Labor S.A-Ministerio de Educación y Ciencias.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción del original "Principles and Standars for school mathematics" 2000.* Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Papageorgiou, E. (2009). Towards a teaching approach for improving mathematics inductive reasoning problem solving. *Proceedings of the 33rd Conference of the International International Group for the Psychology of Math. 4*, pp. 313-320. Thessaloniki, Greece: PME.

Pólya, G. (1966). *Matemática y razonamiento plausible.* Madrid: Technos-Madrid.

Polya, G. (1994). *Cómo plantear y resolver problemas* (Décimooctava ed.). (J. Zagazagoitia, Trad.) México: Trillas.

Reid, D. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies Mathematical, 73*(3), 297–328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* San José, USA: Springer.

Sosa Moguel, L. E., Aparicio Landa, E., & Cabañas-Sánchez, G. (2019). Characterization of Inductive Reasoning in Middle School Mathematics Teachers in a Generalization Task. International Electronic Journal of Mathematics Education 14 (3), 563-581. doi.org/10.29333/iejme/5769

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.